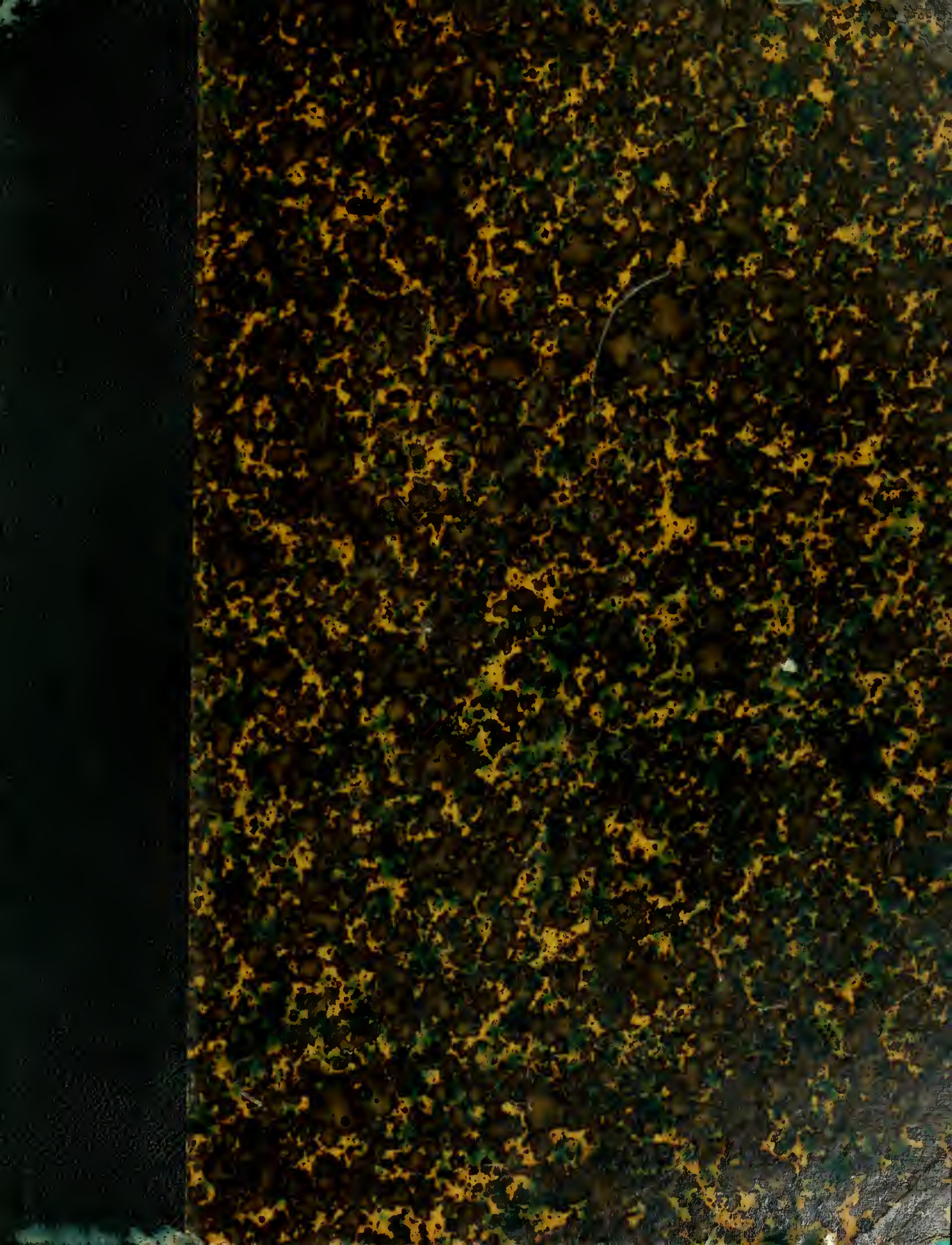
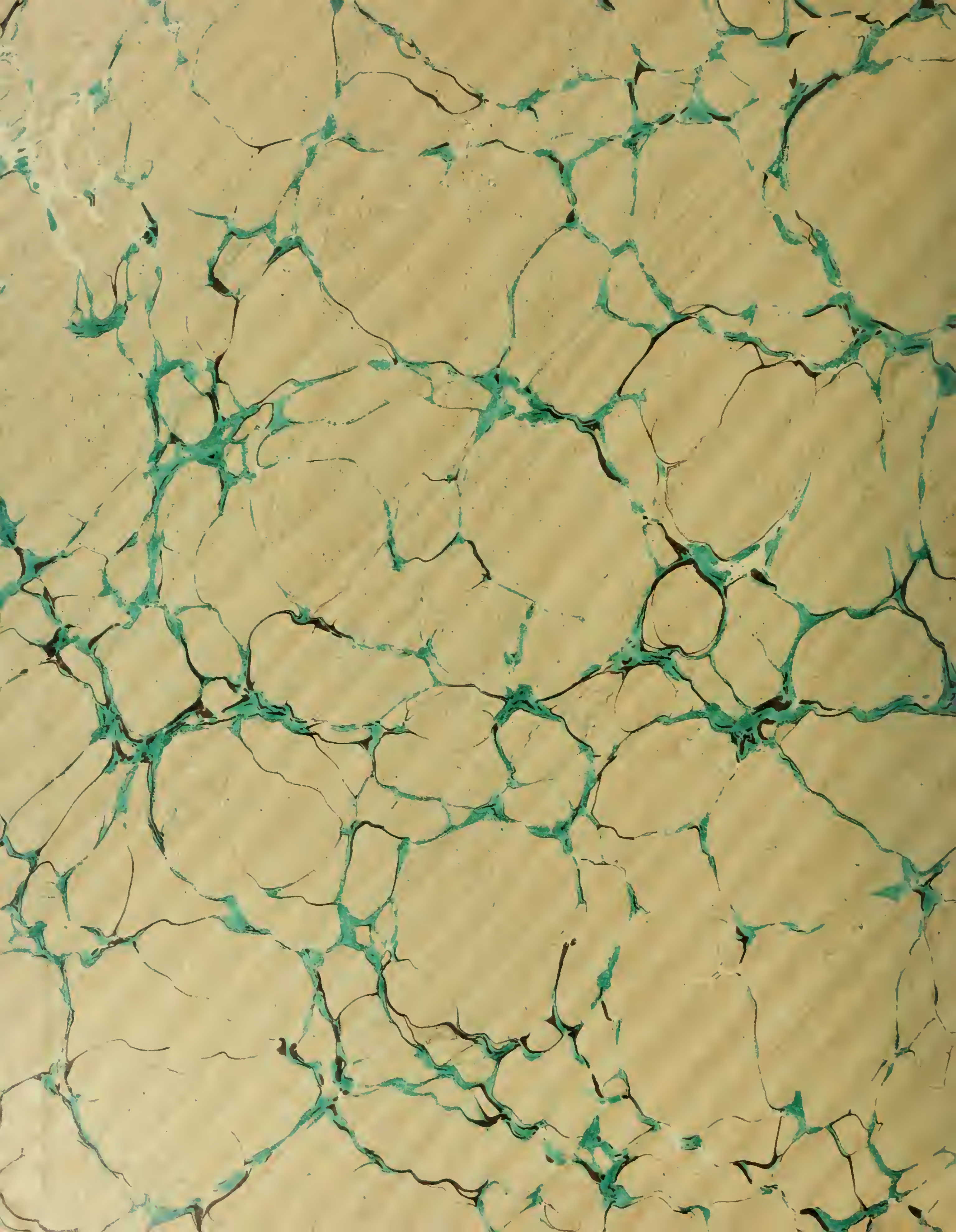
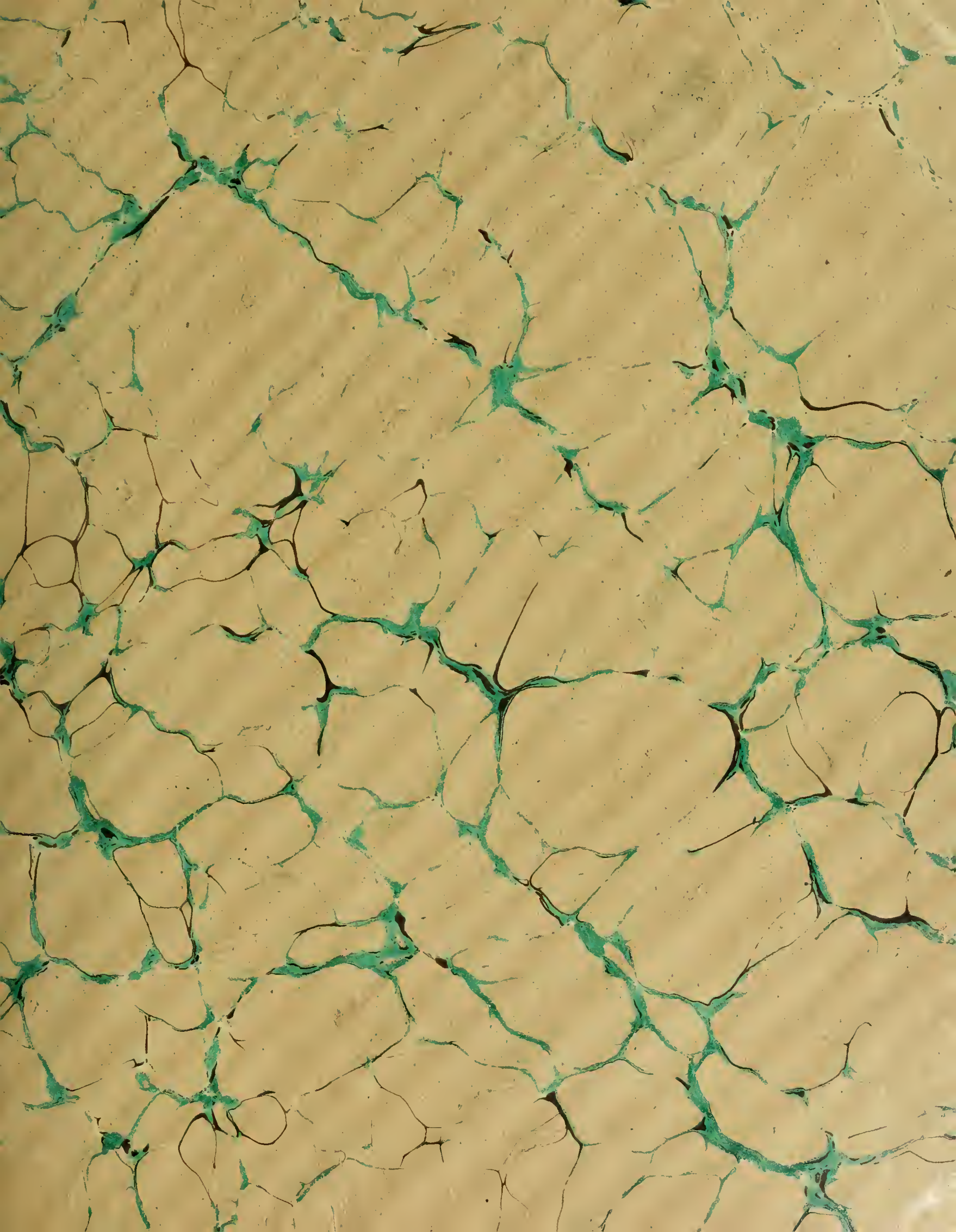






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XV. — ANNÉE 1870.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1870

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XV.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

NOTE

SUR

LES SINGULARITÉS ÉLEVÉES DES COURBES PLANES [*];

Par M. DE LA GOURNERIE.

SECONDE PARTIE.

Pour compléter l'exposition du mode de discussion que je propose, je vais en faire l'application à trois courbes. Je rappelle que j'ai pris pour coordonnées l'abscisse x et le rapport u de l'ordonnée à l'abscisse.

1. Je considère en premier lieu la courbe du trente-deuxième ordre représentée par l'équation

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} & u^{15} - 2u^{14} + u^{13}x + u^{13} - u^{12}x + u^{9}x^{3} \\ & \quad - 2u^{3}x^{9} + u^{2}x^{9} - 2ux^{10} + x^{11} + x^{17} = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit immédiatement qu'elle possède à l'origine un point multiple de l'ordre 15, et que treize des quinze branches sont tangentes à l'axe des abscisses.

A. Lorsque x est infiniment petit, les valeurs de u pour ces treize

---

[*] *Voir* première Partie, t. XIV (2e série), p. 425.

branches sont infiniment petites. De quelques ordres qu'elles soient par rapport à x, les trois premiers termes disparaissent devant le quatrième, u^3x^9 devant u^2x^9 et x^{17} devant x^{11}. Nous pouvons donc négliger cinq termes dans la recherche des grandeurs principales u_1, et ne considérer qu'un polynôme pouvant être ordonné suivant les puissances croissantes de x et les puissances décroissantes de u

$$(b) \qquad u^{13} - u^{12}x + u^9x^3 + u^2x^9 - 2ux^{10} + x^{11}.$$

B. Je cherche d'abord les valeurs de u de l'ordre le moins élevé. Je dois en trouver treize, parmi lesquelles les valeurs des ordres supérieurs figureront comme nulles. Le terme u^{13} entre donc dans l'équation qui donnera la première branche. Je suppose successivement que chacun des autres termes du polynôme (b) soit réuni à u^{13}, et je vois l'ordre qui en résulte pour u. On obtient le plus faible lorsqu'on pose $u^{13} + u^9x^3 = 0$. Nous avons donc

$$u^9(u^4 + x^3) = 0;$$

u possède par conséquent quatre valeurs de l'ordre $\frac{3}{4}$, et neuf d'ordres plus élevés. Les premières déterminent une branche ayant un rebroussement de première espèce, avec un point quadruple et un rayon de courbure nul.

C. L'équation qui donne la seconde branche ne peut pas contenir des puissances de u supérieures à la neuvième, et renferme nécessairement le terme u^9x^3. On trouve $u^9x^3 + u^2x^9 = 0$, d'où

$$u^2x^3(u^7 + x^6) = 0.$$

Des neuf valeurs supérieures à $\frac{3}{4}$, sept sont de l'ordre $\frac{6}{7}$ et deux d'ordres plus élevés. Le facteur x^3 indique que les branches, dans lesquelles les valeurs de u sont d'ordres inférieurs à $\frac{6}{7}$, possèdent sur l'axe des abscisses trois points coïncidant avec l'origine des coordonnées, indépendamment de ceux qui forment la multiplicité de ce point singulier.

La branche $(u^7 + x^6)$ se décompose en sept branches partielles dont six sont imaginaires et une réelle. Les rayons de courbure de toutes ces branches changent de signe à l'origine en passant par zéro.

D. J'ai ensuite $u^2x^9 - 2ux^{10} + u^{11} = 0$, d'où

$$x^9(u - x)^2 = 0.$$

u ayant deux valeurs égales, je dois avoir égard aux termes qui, dans l'équation générale (a), sont de l'ordre immédiatement supérieur à celui des termes de l'équation que je viens d'écrire, en considérant u comme du premier ordre. Je trouve

$$x^9(u - x)^2 + u^9x^3 - 2u^3x^9 = 0.$$

Je remplacce u hors de la parenthèse par sa valeur principale x, et j'ai l'équation

$$u = x \pm \sqrt{x^3},$$

qui caractérise un rebroussement de seconde espèce.

E. Je vais maintenant m'occuper des branches qui ne touchent pas l'axe des abscisses.

Lorsqu'on suppose x infiniment petit et u fini, l'équation (a) se réduit à

$$u^{13}(u - 1)^2 = 0.$$

La valeur 1 de u donne seulement l'inclinaison de la tangente des branches. Pour connaître leur nature, il faut introduire les termes dont l'ordre est immédiatement supérieur à celui des termes qui ont été conservés. La partie nouvelle ainsi ajoutée à l'équation est divisible par $(u - 1)$. En opérant comme il est dit au n° 5 de la première Partie de cette Note, on est conduit à rechercher les valeurs infiniment petites de $(u - 1)$ données par l'équation

$$u_1^{13}(u - 1)^2 + u_1^{12}x(u - 1) + u_1^9x^3 = 0,$$

dans laquelle u_1 est égal à l'unité. On trouve

$$u - 1 + x = 0 \quad \text{et} \quad u - 1 + x^2 = 0.$$

Nous avons deux branches simples tangentes l'une à l'autre. Le rayon de courbure de la première est égal à la racine carrée de 2; la seconde présente une inflexion.

2. Pour seconde application, je prendrai l'équation

$$u^{16} - u^{11}x^3 + u^{10}x^5 - u^6x^6 - u^5x^8 + ux^9 - 3x^{11} = 0.$$

En raisonnant comme à l'article précédent, on trouve que les valeurs principales de u sont données par les équations

$$u(u^5 - x^3)^2(u^5 + x^3) = 0,$$
$$x^9(u - 3x^2) = 0.$$

Les termes de la première doivent être considérés comme étant de l'ordre $9\frac{3}{5}$. Pour étudier la singularité déterminée par les deux valeurs de u^5 dont les grandeurs principales sont égales à x^3, je dois avoir égard aux termes de l'ordre immédiatement supérieur qui est le onzième. J'ai

$$u(u^5 - x^3)^2(u^5 + x^3) + u^{10}x^5 - u^5x^8 - 3x^{11} = 0,$$

d'où

$$u_1^5 = x^3, \quad u^5 = x^3 \pm \sqrt{\frac{-u_1^{10}x^5 + u_1^5x^8 + 3x^{11}}{u_1(u_1^5 + x^3)}}.$$

Eu égard à la valeur de u_1^5, les termes du numérateur sous le radical ne diffèrent que par leurs coefficients; on peut les réduire à un seul, $3u_1^5x^8$. Les deux termes du dénominateur donnent de la même manière $2u_1x^3$, et on a

$$u^5 = x^3 \pm \sqrt{\frac{3}{2}u_1^4x^5}.$$

On peut remplacer le produit $u_1^4x^5$ par $u_1^9x^2$. Les exposants de u_1 et de x sous le radical ne sont donc pas complétement déterminés, mais l'un d'eux est nécessairement pair et l'autre impair.

La singularité consiste en un rebroussement de seconde espèce.

On déduit de la valeur trouvée pour u^5

$$u = x^{\frac{3}{5}} \pm \left(\frac{3}{50}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{10}} u_1^{\frac{2}{1}}.$$

L'abscisse étant infiniment petite du premier ordre, l'ordonnée est de l'ordre $\frac{8}{5}$, et la différence des ordonnées pour les deux branches de l'ordre $\frac{23}{10}$.

Je ne m'arrête pas aux particularités des branches caractérisées par les équations $u^5 + x^3 = 0$ et $u - 3x^2 = 0$, parce qu'elles ne présentent aucun intérêt particulier.

3. Je vais maintenant montrer par un exemple que la méthode s'applique sans difficulté au cas où le point multiple est à l'infini.

Jusqu'à présent j'ai pris pour variables x et $\frac{y}{x}$, parce que la discussion roule sur les nombres p et q qui sont les exposants de ces quantités. Cette considération a peu d'importance dans l'étude d'une courbe déterminée. Comme d'ailleurs je n'aurai pas à me servir de formules précédemment établies, j'emploierai les coordonnées ordinaires x et y.

La courbe représentée par l'équation

$$(a) \qquad x^{22}y^8 - x^{11}y^{11} + x^{19} + x^2y^{13} - 2xy^{13} + y^{13} = 0$$

possède deux points multiples à l'infini : l'un du dix-septième ordre sur l'axe des ordonnées, l'autre du huitième sur celui des abscisses. Je me propose de déterminer les singularités des branches qui passent par le premier de ces points.

A. Si l'on suppose que x et y croissent indéfiniment, on reconnaît, en raisonnant comme je l'ai fait au n° **1** A, que quatre des termes disparaissent devant les trois autres, et que l'équation se réduit à

$$x^{22}y^8 - x^{11}y^{11} + x^2y^{13} = 0.$$

Les termes ont deux facteurs communs x^2 et y^8. Le premier correspond à des branches infinies dont les asymptotes sont parallèles à l'axe des ordonnées; le second à des branches dont les asymptotes sont parallèles à l'axe des abscisses.

Je supprime ces facteurs, et j'ai pour représenter les branches dans

lesquelles les coordonnées sont l'une et l'autre infinies l'équation

$$(b) \qquad x^{20} - x^9 y^3 + y^5 = 0.$$

On en déduit les deux équations caractéristiques

$$x^{11} - y^3 = 0, \quad x^9 - y^2 = 0.$$

La branche qui correspond à la première a un rebroussement de première espèce avec un point octuple sur l'axe des ordonnées. La droite de l'infini est la tangente de rebroussement; elle possède sur la courbe trois points indépendamment de ceux qui forment la multiplicité de ce point singulier.

La branche caractérisée par la seconde équation possède sur l'axe des ordonnées un point septuple; elle traverse la droite de l'infini qui est sa tangente, et elle a en commun avec cette ligne deux points en outre de ceux qui forment la multiplicité du point singulier.

B. Il faut actuellement rechercher les équations caractéristiques des branches pour lesquelles l'ordonnée est infinie et l'abscisse finie ou de degré zéro. En ne conservant que les termes qui, dans ces hypothèses, sont de l'ordre le plus élevé, on a

$$y^{13}(x-1)^2 = 0.$$

La branche n'est pas suffisamment caractérisée par l'équation $(x-1)^2 = 0$. J'introduis en conséquence les termes qui dans l'équation sont de l'ordre immédiatement inférieur à celui des termes conservés, et j'ai

$$xy^{13}(x-1)^2 - y^{11}x^{11} = 0,$$

$$x = 1 \pm \frac{1}{y}.$$

Dans cette équation, on doit regarder y comme infiniment grand; en d'autres termes, la courbe $y^2(x-1)^2 - 1 = 0$ possède, au point situé à l'infini sur l'axe des ordonnées, la même singularité que la branche considérée.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge;

Par M. J. LIOUVILLE.

« ... Je veux vous parler cette fois de l'intégrale

$$A = \int_0^\infty f\left(x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{arc\,tang.} x \frac{dx}{x}$$

que je ramène à celle-ci :

$$B = \int_0^\infty f\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x},$$

ou bien encore à celle-ci :

$$C = \int_0^1 f\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x},$$

que l'on rattache immédiatement à la précédente. La fonction désignée par f est quelconque, sous la condition naturellement sous-entendue que chacune des trois intégrales

$$A, \quad B, \quad C,$$

dont il s'agit, ait une valeur finie et un sens précis.

On prouve en effet tout d'abord, et très-facilement, que

$$B = 2C.$$

Puis, d'un autre côté, on démontre que

$$A = \frac{\pi}{4} B.$$

» En d'autres termes, on a l'équation

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)\operatorname{arc\,tang} x\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x},$$

que je crois nouvelle, et que vous trouverez peut-être digne d'attirer un moment votre attention. »

Mémoire sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune [*];

PAR M. V. PUISEUX,

Membre du Bureau des Longitudes.

Si le moyen mouvement de la Lune était uniforme, l'expression de la longitude moyenne de cet astre en fonction du temps serait de la forme $A + Bt$, A et B désignant des nombres constants. Mais on sait au contraire que ce mouvement s'accélère actuellement de siècle en siècle, en sorte que l'expression précédente doit être complétée par un terme de la forme Ct^2, C désignant un nombre qui peut lui-même être variable avec le temps et que nous appellerons le *coefficient de l'accélération séculaire*.

Supposons le temps exprimé en siècles de cent années juliennes et compté à partir de l'époque actuelle, du 1er janvier 1850, par exemple; on trouve que pour rendre compte de quelques éclipses observées dans l'antiquité, il faut attribuer au coefficient C une valeur de 12″ environ pour les époques qui précèdent la nôtre de vingt et quelques siècles.

Laplace, en cherchant l'explication théorique de ce fait, a trouvé que la diminution de l'excentricité de l'orbite de la Terre, causée par les actions perturbatrices des autres planètes, devait accélérer en effet le mouvement de notre satellite; mais comme le coefficient de l'accélération séculaire, conclu de cette seule considération et calculé d'ailleurs avec toute l'exactitude nécessaire [**], n'est guère que la moitié de

[*] Cet article est extrait d'un travail plus étendu dont l'Académie des Sciences a ordonné l'impression dans les *Mémoires des Savants étrangers*. Plusieurs développements de calcul ont dû naturellement être supprimés ici.

[**] Une première approximation avait donné à Laplace une valeur de ce coefficient voisine de 10″. Les calculs plus complets de MM. Adams et Delaunay ont montré que cette valeur devait être réduite à 6″,1.

celui qui paraît résulter des anciennes éclipses, on a été conduit à attribuer ce désaccord à quelque influence dont on n'aurait pas tenu compte jusqu'à présent. C'est ainsi que l'attraction exercée sur la Lune par le bourrelet liquide que les marées soulèvent à la surface des océans a été signalée comme pouvant à la longue accélérer le mouvement de cet astre, en même temps que l'action réciproque de la Lune sur ce bourrelet altérerait la constance du jour sidéral. Mais avant d'introduire dans la théorie de la Lune un effet de ce genre, dont le calcul rigoureux paraît bien difficile dans l'état actuel de la science, il m'a semblé qu'il convenait de ne négliger aucun terme sensible parmi ceux que fournit la théorie ordinaire, dans laquelle on n'a pas égard au changement de forme de la partie liquide de la Terre. En me plaçant à ce point de vue, je me suis demandé s'il était bien démontré que le déplacement séculaire du plan de l'orbite terrestre n'eût aucune influence sur l'accélération du mouvement de la Lune.

Laplace, Poisson, Plana ont admis que le plan de l'orbite lunaire se déplace en même temps que celui de l'orbite terrestre, de manière que l'inclinaison mutuelle de ces deux plans conserve une valeur moyenne constante, et ils en ont conclu qu'on pouvait, dans la théorie de la Lune, considérer le plan de l'écliptique comme un plan fixe. Ils ont pris ce plan pour un des plans coordonnés, et l'expression de la longitude de la Lune à laquelle ils ont été conduits s'est trouvée nécessairement indépendante du déplacement de l'écliptique.

Mais les illustres auteurs que je viens de nommer ne sont arrivés à ce résultat qu'en se contentant d'une approximation limitée relativement à l'inclinaison φ de l'orbite lunaire, aux excentricités e et e' des orbites de la Lune et du Soleil et au rapport $\frac{a}{a'}$ de leurs demi-grands axes; on peut se demander si les mêmes conclusions subsistent encore, lorsqu'on tient compte de puissances plus élevées de ces petites quantités.

On aperçoit aisément que si l'on rapporte le mouvement de la Lune à des plans invariables dont l'un soit la position de l'écliptique à l'époque prise pour origine du temps, il s'introduit, dans l'expression de la dérivée de la longitude, des termes proportionnels au carré de l'inclinaison φ' du plan de l'écliptique mobile. Au degré d'approxima-

tion où se sont arrêtés les géomètres déjà cités, ces termes se détruisent; mais admettons qu'il n'en soit plus ainsi lorsqu'on pousse plus loin l'approximation, et soit $c\varphi'^2$ la somme des termes de ce genre : il en résultera, dans la longitude même de la Lune, la partie $c\int\varphi'^2 dt$.

Pendant un temps considérable, on peut regarder l'inclinaison φ' comme proportionnelle au temps et poser $\varphi' = \alpha t$; la partie de la longitude dont il s'agit sera donc $\frac{1}{3}c\alpha^2 t^3$ et croîtra comme le cube du temps. Un pareil terme pourrait être insensible pendant un certain nombre de siècles avant et après l'époque actuelle, mais acquérir une valeur appréciable aux époques éloignées, telles que celles des anciennes éclipses. Il aurait alors pour effet de modifier le coefficient de l'accélération qui conviendrait à ces temps reculés; car, en l'ajoutant au terme $c_1 t^2$ qui résulte de la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre, on obtient une somme de la forme $(c_1 + ct)t^2$, dans laquelle t^2 est multiplié par une quantité variable avec le temps. Il importe donc, pour la comparaison des éclipses historiques avec la théorie, de s'assurer s'il existe dans l'expression de la longitude de la Lune des termes proportionnels à une puissance du temps supérieure à la seconde et d'en déterminer la grandeur.

L'examen de cette question est l'objet du présent Mémoire; je le divise en trois Sections. Dans la première, je reproduis, sauf quelque changement dans la forme, l'analyse de Poisson, et je conclus, comme lui, qu'au degré d'approximation dont il s'est contenté, le déplacement du plan de l'écliptique n'influe pas sur l'accélération du mouvement de la Lune. Dans les deux autres Sections, je reprends le problème en poussant plus loin l'approximation relativement aux quantités φ, e, e', $\frac{a}{a'}$. Mais alors se présente une difficulté qui tient au déplacement rapide du nœud de l'orbite lunaire.

Dans les théories des planètes et de la Lune, il y a deux sortes d'approximations à considérer : l'une est ordonnée suivant les puissances des excentricités, des inclinaisons et du rapport des grands axes des orbites; l'autre suivant les puissances de la force perturbatrice. Ne nous occupons en ce moment que de la dernière. Quand il s'agit des planètes, la méthode qu'on suit ordinairement consiste à

regarder d'abord les éléments elliptiques comme constants dans les expressions de leurs dérivées; l'intégration fournit alors des valeurs des éléments où les erreurs sont de l'ordre du carré de la force perturbatrice; puis, à l'aide de ces valeurs approchées, on en forme de plus exactes où les erreurs sont de l'ordre du cube de la force perturbatrice, et ainsi de suite. Voici maintenant ce qui arriverait si l'on appliquait à la question qui nous occupe cette méthode d'approximations successives.

Nommons n et n' les vitesses angulaires moyennes de la Lune et du Soleil autour de la Terre. La fraction $\frac{n'^2}{n^2}$ caractérise, dans la théorie de la Lune, l'ordre de grandeur de la force perturbatrice, et, pour que les approximations successives fussent réellement convergentes, il faudrait que les parties des éléments fournies par chacune d'elles continssent le facteur $\frac{n'^2}{n^2}$ une fois de plus que les parties fournies par l'approximation précédente. Or c'est ce qui n'a pas lieu pour les parties de la longitude de la Lune proportionnelles à $\int \varphi'^2 dt$.

En effet, il y a d'abord dans la fonction perturbatrice R un terme non périodique de la forme $n'^2 \mathrm{K} \varphi'^2$, K étant de l'ordre zéro relativement à la force perturbatrice; il en résulte à la première approximation, dans l'expression de la longitude, une partie de la forme $\frac{n'^2}{n}\mathrm{K}\int\varphi'^2 dt$. Mais θ et θ' désignant les longitudes des nœuds ascendants de l'orbite lunaire et de l'écliptique, il y a aussi dans R un terme de la forme $n'^2 \mathrm{K}\varphi' \cos(\theta - \theta')$; il en résulte dans la dérivée, par rapport au temps de chaque élément de la Lune, une partie de la forme $\frac{n'^2}{n}\mathrm{K}\varphi' \,{}^{\sin}_{\cos}(\theta - \theta')$. On a d'ailleurs à peu près

$$\theta = \text{const.} - \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}t;$$

si donc on intègre, en traitant comme des constantes les quantités φ' et θ' qui varient très-lentement, on voit que le facteur $\frac{n'^2}{n}$ disparaîtra et que l'élément considéré contiendra une partie de la forme

$$\mathrm{K}\varphi' \,{}^{\cos}_{\sin}(\theta - \theta').$$

Lorsque ensuite on voudra passer à la seconde approximation, il faudra, dans les dérivées des éléments, augmenter ceux-ci des inégalités fournies par la première approximation. Or quand, dans une expression de la forme $\frac{n'^2}{n}\mathrm{K}\varphi' \frac{\sin}{\cos}(\theta - \theta')$, on augmente les éléments qui y figurent de quantités qui sont elles-mêmes de la forme $\mathrm{K}\varphi' \frac{\cos}{\sin}(\theta - \theta')$, il en résulte des termes non périodiques de la forme $\frac{n'^2}{n}\mathrm{K}\varphi'^2$. La seconde approximation amènera donc, dans la dérivée de la longitude, des parties de cette dernière forme, et par suite, dans la longitude elle-même, des termes de la forme $\frac{n'^2}{n}\mathrm{K}\int \varphi'^2 dt$, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que ceux qu'avait fournis la première approximation. En poursuivant ce raisonnement, on voit qu'il en serait de même des approximations suivantes. La méthode des approximations successives, telle qu'on la pratique dans la théorie des planètes, donnerait donc le coefficient de $\int \varphi'^2 dt$ dans la longitude de la Lune sous la forme d'une série non convergente, et par conséquent elle doit être rejetée.

Pour éviter cette difficulté, j'emprunte à M. Delaunay [*] l'idée qui sert de base à sa théorie de la Lune, et qui consiste à intégrer les équations du mouvement de cet astre en réduisant d'abord la fonction R à sa partie non périodique accompagnée seulement du terme périodique relatif à un certain argument.

Dans le cas actuel, je joins à la partie non périodique les deux termes dont les arguments sont $\theta - \theta'$ et $2\theta - 2\theta'$. Il est inutile d'avoir égard à ceux qui ont pour arguments des multiples plus élevés de $\theta - \theta'$; car les parties non périodiques qui pourraient en résulter dans la dérivée de la longitude de la Lune renfermeraient le facteur φ'^4 au moins et seraient certainement négligeables dans les limites des temps historiques.

---

[*] Dans la partie de sa *Théorie de la Lune* qu'il a publiée, M. Delaunay fait abstraction des changements qu'éprouvent les éléments de l'orbite du Soleil. Il suppose donc provisoirement $\varphi' = 0$ et ajourne le calcul qui nous occupe ici des effets dus au déplacement du plan de l'écliptique.

La fonction perturbatrice étant ainsi réduite, on peut intégrer, non plus seulement par approximation, mais rigoureusement. Pour avoir égard ensuite aux termes de la fonction perturbatrice qu'on a laissés de côté, il faudra regarder les constantes introduites par l'intégration comme de nouvelles variables; mais alors les dérivées de ces variables ne contiendront plus de termes dépendants des arguments $\theta - \theta'$, $2\theta - 2\theta'$, ou du moins ne renfermeront de pareils termes qu'avec des coefficients du second ordre, et la méthode des approximations successives deviendra applicable.

Nommons R_1 ce que devient R quand on y supprime tous les termes périodiques autres que ceux qui ont $\theta - \theta'$ et $2\theta - 2\theta'$ pour arguments. L'intégration des équations auxquelles se réduisent les équations différentielles du mouvement de la Lune, quand on remplace R par R_1, est l'objet de la seconde section du Mémoire, et elle me conduit, entre autres conclusions, à celle-ci :

La fonction perturbatrice étant supposée réduite à sa partie R_1, si la longitude de la Lune contenait un terme en $\int \varphi'^2 dt$ et qu'on le représentât par $\frac{n'^2}{n} K \int \varphi'^2 dt$, le coefficient K serait une fonction de φ, e, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ du huitième degré au moins par rapport à ces petites quantités.

Il suit de là qu'en supposant toujours la fonction R réduite à R_1, la longitude de la Lune ne contient pas de terme proportionnel au cube du temps qui soit sensible; il reste à voir si les parties de R qu'on a d'abord laissées de côté n'en introduisent pas. Cette recherche, plus laborieuse que la précédente, est l'objet de la troisième section; j'y fais voir que les divers termes de la partie $R - R_1$ de la fonction R introduisent dans la longitude moyenne, à la seconde approximation, des termes en t^4, en t^3 et en t^2 qui proviennent du déplacement de l'écliptique. Mais les termes en t^4 se détruisent deux à deux et leur somme est nulle; d'un autre côté, la somme des termes en t^2 peut être regardée comme insensible. Reste donc la somme des termes en t^3 : elle n'est pas nulle, et on peut la considérer, ainsi qu'il a été dit plus haut, comme modifiant le coefficient de l'accélération aux époques très-éloignées de la nôtre. Toutefois, si l'on en calcule la valeur numérique, on trouve que, pour l'époque des éclipses le plus ancienne-

ment observées, les termes en question ont pour effet de diminuer le coefficient de l'accélération séculaire d'une quantité s'élevant à peine à $\frac{1}{10}$ de seconde. Comme ces éclipses paraissent exiger au contraire que ce coefficient soit augmenté et qu'il le soit de plusieurs secondes, on voit que ce n'est pas dans le fait du déplacement du plan de l'orbite terrestre qu'on peut trouver l'explication du désaccord qui semble exister entre la théorie et les observations.

Doit-on chercher à faire disparaître ce désaccord par une interprétation nouvelle des documents historiques relatifs aux anciennes éclipses, ou faut-il lui assigner pour cause l'attraction mutuelle de la Lune et du ménisque soulevé par les marées à la surface de notre globe? C'est ce que je n'entreprendrai pas d'examiner ici. Mais avant de s'engager dans l'une ou l'autre de ces deux voies, il importait, ce me semble, d'avoir vidé la question qui fait l'objet du présent Mémoire. A ce point de vue, la conclusion de mes recherches, bien que négative, ne paraîtra peut-être pas entièrement dépourvue d'intérêt.

PREMIÈRE SECTION.

Soient M la masse de la Terre, m celle de la Lune, m' celle du Soleil; a et a' les demi-grands axes des orbites que la Lune et le Soleil décrivent autour de la Terre, e et e' les excentricités de ces orbites, n et n' les vitesses angulaires moyennes des mouvements elliptiques qui sont à l'époque t ceux des deux astres; φ et φ' les inclinaisons des plans des orbites sur le plan fixe avec lequel coïncidait l'écliptique à l'époque $t = 0$; θ et θ' les longitudes des nœuds ascendants; ϖ et ϖ' les longitudes des périgées; λ et λ' les longitudes moyennes de la Lune et du Soleil à l'époque $t = 0$; l et l' les longitudes moyennes des mêmes astres à l'époque t, en sorte qu'on ait

$$l = \int_0^t n\,dt + \lambda, \quad l' = \int_0^t n'\,dt + \lambda'.$$

Lorsqu'on cherche les inégalités séculaires du mouvement de la Lune, on peut, sans grande erreur, omettre dans la fonction perturbatrice R les termes périodiques dont les arguments renferment les longitudes moyennes de la Lune et du Soleil et dont les périodes, par conséquent, sont comparables au mois ou à l'année. Si, de plus, on

néglige les produits de quatre dimensions des quantités e, e', φ, φ', $\sqrt{\frac{n}{a'}}$, on trouve pour la fonction R l'expression suivante :

$$R = n'^2 \varepsilon a^2 \left[-\frac{1}{4} - \frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{8}\varphi^2 + \frac{3}{8}\varphi'^2 - \frac{3}{4}\varphi\varphi'\cos(\theta - \theta') \right],$$

où ε désigne la fraction très-voisine de l'unité $\frac{1}{1+\frac{M}{m'}}$.

A ce degré d'approximation, les formules qui donnent les dérivées des éléments elliptiques du mouvement de la Lune, savoir :

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\theta} + \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{d\varpi} + \frac{dR}{d\lambda}\right),\\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\varphi},\\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{dR}{d\varpi} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2 e}\frac{dR}{d\lambda},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\varphi} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{dR}{de},\\
\frac{da}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{dR}{d\lambda},\\
\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{dR}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2 e}\frac{dR}{de} - \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\varphi},
\end{aligned}$$

se réduisent aux suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\varphi'\sin(\theta - \theta'),\\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[1 - \frac{\varphi'}{\varphi}\cos(\theta - \theta')\right],\\
\frac{de}{dt} &= 0,\\
\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n},\\
\frac{da}{dt} &= 0,\\
\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[-1 - \frac{9}{8}e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + \frac{9}{8}\varphi^2 + \frac{3}{2}\varphi'^2 - \frac{21}{8}\varphi\varphi'\cos(\theta - \theta')\right].
\end{aligned}$$

Pour intégrer les deux premières, nous ferons

$$\varphi \sin\theta = x,\quad \varphi\cos\theta = y,\quad \varphi'\sin\theta' = x',\quad \varphi'\cos\theta' = y';$$

elles nous donneront

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y + \alpha y',\quad \frac{dy}{dt} = \alpha x - \alpha x',$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n} = \alpha.$$

Négligeons d'abord les termes en x' et en y'; nous conclurons de ces équations

$$x = \mathrm{A}\cos\alpha t - \mathrm{B}\sin\alpha t,\quad y = \mathrm{A}\sin\alpha t + \mathrm{B}\cos\alpha t,$$

A et B étant des constantes arbitraires. Si maintenant nous voulons tenir compte des termes en x' et en y', nous devrons, dans les valeurs précédentes de x et de y, regarder A et B, non plus comme des constantes, mais comme des fonctions inconnues de t qui devront satisfaire aux équations suivantes :

$$\frac{d\mathrm{A}}{dt} = -\alpha x'\sin\alpha t + \alpha y'\cos\alpha t,\quad \frac{d\mathrm{B}}{dt} = -\alpha x'\cos\alpha t - \alpha y'\sin\alpha t.$$

Il en résulte, en appelant A_0 et B_0 deux constantes,

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \mathrm{A}_0 - \alpha\int x'\sin\alpha t\,dt + \alpha\int y'\cos\alpha t\,dt,\\ \mathrm{B} &= \mathrm{B}_0 - \alpha\int x'\cos\alpha t\,dt - \alpha\int y'\sin\alpha t\,dt.\end{aligned}$$

Or on a, en intégrant par partie,

$$\alpha\int x'\sin\alpha t\,dt = -x'\cos\alpha t + \int\frac{dx'}{dt}\sin\alpha t\,dt,$$

ou sensiblement, à cause de la lenteur avec laquelle x' varie,

$$\alpha\int x'\sin\alpha t\,dt = -x'\cos\alpha t,$$

et pareillement

$$\alpha\int x'\cos\alpha t\,dt = x'\sin\alpha t,$$
$$\alpha\int y'\sin\alpha t\,dt = -y'\cos\alpha t,$$
$$\alpha\int y'\cos\alpha t\,dt = y'\sin\alpha t.$$

On en conclut

$$A = A_0 + x'\cos\alpha t + y'\sin\alpha t, \quad B = B_0 - x'\sin\alpha t + y'\cos\alpha t,$$

et par conséquent

$$x = A_0\cos\alpha t - B_0\sin\alpha t + x', \quad y = A_0\sin\alpha t + B_0\cos\alpha t + y'.$$

Comme x' et y' s'annulent avec t, on voit que A_0 et B_0 sont les valeurs initiales de x et de y, en sorte que, si l'on représente par φ_0 et θ_0 celles de φ et de θ, on aura

$$A_0 = \varphi_0\sin\theta_0, \quad B_0 = \varphi_0\cos\theta_0.$$

Les formules précédentes peuvent donc s'écrire

$$\varphi\sin\theta = \varphi_0\sin(\theta_0 - \alpha t) + \varphi'\sin\theta', \quad \varphi\cos\theta = \varphi_0\cos(\theta_0 - \alpha t) + \varphi'\cos\theta',$$

et, en ajoutant les carrés de ces deux équations, on trouve

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + 2\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta') + \varphi'^2.$$

Les quantités φ' et θ' variant avec le temps, on voit que l'inclinaison φ de l'orbite lunaire sur le plan fixe n'est pas constante. Mais si l'on nomme i l'inclinaison de la même orbite sur le plan de l'écliptique mobile, on aura

$$\cos i = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\theta - \theta');$$

ou bien, en négligeant les produits de quatre dimensions de i, φ, φ',

$$\begin{aligned} i^2 &= \varphi^2 + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi'\cos(\theta - \theta') \\ &= (\varphi\sin\theta - \varphi'\sin\theta')^2 + (\varphi\cos\theta - \varphi'\cos\theta')^2 = \varphi_0^2. \end{aligned}$$

On voit que l'angle i se réduit à la constante φ_0 : ainsi, au degré d'approximation dont nous nous sommes contentés, le plan de l'éclip-

tique et celui de l'orbite lunaire se déplacent simultanément, de façon que leur inclinaison mutuelle reste constante.

Formons à présent la dérivée de la longitude moyenne l. On a

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{d\lambda}{dt};$$

si, dans la valeur de $\frac{d\lambda}{dt}$ écrite ci-dessus, on remplace φ^2 par

$$\varphi_0^2 + 2\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta') + \varphi'^2$$

et $\varphi\varphi'\cos(\theta - \theta')$ par

$$\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta') + \varphi'^2,$$

on trouvera que les termes en φ'^2 se détruisent, et il viendra

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[-1 - \frac{9}{8}e^2 + \frac{9}{8}\varphi_0^2 - \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{8}\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta')\right].$$

Nous avons donc

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[-1 - \frac{9}{8}e^2 + \frac{9}{8}\varphi_0^2 - \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{8}\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta')\right].$$

Si la valeur de $\frac{dl}{dt}$ était constante, la longitude moyenne de la Lune croîtrait proportionnellement au temps, et il n'y aurait aucune accélération dans le mouvement de cet astre. Or les équations

$$\frac{de}{dt} = 0, \quad \frac{da}{dt} = 0,$$

trouvées ci-dessus, montrent que e et a sont des constantes, et il en est de même de n, qui est lié avec a par l'équation

$$n = \sqrt{\frac{f(M+m)}{a}},$$

où f désigne la constante de l'attraction. Les quantités φ_0 et θ_0 sont aussi des constantes par définition; mais e', φ' et θ' varient à cause des actions perturbatrices des autres planètes sur la Terre. La longitude moyenne de la Lune contiendra donc une partie non proportionnelle

au temps, savoir :

$$-\frac{3}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\int e'^2\,dt - \frac{3}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\varphi_0\int\varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta')\,dt.$$

Considérons d'abord le second terme; en effectuant l'intégration comme si φ' et θ' étaient des constantes, on le mettra sous la forme $\frac{1}{2}\varphi_0\varphi'\sin(\theta_0 - \alpha t - \theta')$. C'est, comme on voit, une quantité périodique dont la période est sensiblement égale à la durée d'une révolution du nœud de la Lune, mais dans laquelle le coefficient du sinus croît avec le temps : toutefois, comme, au bout de vingt-cinq siècles, ce coefficient n'atteint pas 1', et qu'à une époque aussi éloignée une erreur de 1' sur la longitude de la Lune est sans importance, nous pouvons faire abstraction du terme dont il s'agit.

Pour évaluer l'autre terme $-\frac{3}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\int e'^2\,dt$, nous y remplacerons e'^2 par son développement, suivant les puissances du temps; soit donc

$$e'^2 = e_0'^2 + At + Bt^2,$$

ce terme deviendra

$$-\frac{3}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}e_0'^2 t - \frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}At^2 - \frac{1}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}Bt^3.$$

La première partie est proportionnelle au temps et se confond avec le moyen mouvement : on a donc, pour la portion de la longitude moyenne d'où résulte l'accélération du mouvement de la Lune, l'expression

$$-\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}A\left(1 + \frac{2}{3}\frac{B}{A}t\right)t^2.$$

Lorsqu'on remplace A et B par leurs valeurs numériques [*], le fac-

---

[*] On a, d'après M. Le Verrier (*Annales de l'Observatoire*, t. IV, p. 102),

$$\frac{e'}{\sin 1''} = 3459,78 - 8,755\,t - 0,0282\,t^2;$$

il en résulte

$$e'^2 = 0,00028127 - 0,000001424\,t - 0,000000000279\,t^2,$$

et par suite

$$A = -0,000001424, \quad B = -0,000000000279.$$

teur entre parenthèses devient $1 + 0,00131\,t$, et pour $t = -25$ il se réduit à 0,97. Ainsi le terme en t^3, provenant de la variation de e', a pour effet de diminuer des trois centièmes de sa valeur le coefficient de l'accélération relatif à l'époque des plus anciennes éclipses observées. Or ces éclipses paraissent exiger que ce coefficient soit, non pas diminué, mais au contraire à peu près doublé : l'analyse précédente ne fournit donc pas, dans la longitude moyenne de la Lune, de terme proportionnel au cube du temps qui puisse modifier notablement le coefficient de l'accélération applicable aux anciennes éclipses et faire concorder celles-ci avec la théorie.

Observons que la conclusion aurait pu être toute différente si les termes en φ'^2 ne s'étaient pas détruits dans la valeur de $\frac{dl}{dt}$, page 19; il importe donc de chercher si cette dérivée ne contient pas de pareils termes lorsqu'on pousse l'approximation plus loin. C'est ce que nous allons faire dans la suite de ce travail.

DEUXIÈME SECTION.

Nous nous proposons, dans cette Section, d'intégrer les équations différentielles du mouvement de la Lune en conservant seulement, dans la fonction perturbatrice, avec la partie non périodique, les termes d'arguments $\theta - \theta'$ et $2\theta - 2\theta'$. On a vu ci-dessus les motifs qui nous conduisent à traiter d'abord la question ainsi simplifiée, sauf à tenir compte ensuite des parties de la fonction R, que nous laissons de côté en ce moment.

Les lettres M, m, m', a, a', e, e', n, n', φ, φ', θ, θ', ϖ, ϖ', λ, λ', l, l', f, ε, conservant la signification qui leur a été attribuée dans la première Section, posons de plus

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \gamma,\quad \sin\frac{\varphi'}{2}\gamma';$$

appelons r et r' les rayons vecteurs menés du centre de la Terre aux centres de la Lune et du Soleil, et désignons par s le cosinus de l'angle

compris entre ces deux rayons. La fonction perturbatrice relative au mouvement de la Lune sera

$$fm'\left(\frac{rs}{r'^2} - \frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2rr's + r^2}}\right).$$

Si l'on développe $\frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2rr's + r^2}}$ suivant les puissances descendantes de r', cette expression deviendra

$$fm'\left(-\frac{1}{r'} + \frac{r^2}{r'^3}Q_1 + \frac{r^3}{r'^4}Q_2 + \frac{r^4}{r'^5}Q_3 + \frac{r^5}{r'^6}Q_4 + \frac{r^6}{r'^7}Q_5 + \ldots\right),$$

Q_1, Q_2, ... étant des polynômes entiers en s dont voici les valeurs :

$$Q_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}s^2,$$

$$Q_2 = \frac{3}{2}s - \frac{5}{2}s^3,$$

$$Q_3 = -\frac{3}{8} + \frac{15}{4}s^2 - \frac{35}{8}s^4,$$

$$Q_4 = -\frac{15}{8}s + \frac{35}{4}s^3 - \frac{63}{8}s^5,$$

$$Q_5 = \frac{5}{16} - \frac{105}{16}s^2 + \frac{315}{16}s^4 - \frac{231}{16}s^6,$$

....

Mais la fonction perturbatrice n'entre dans les équations du problème que par ses dérivées partielles prises relativement aux éléments de la Lune; nous pouvons donc y supprimer le terme $-\frac{fm'}{r'}$, qui ne dépend pas de ces éléments; et en désignant par R la nouvelle fonction qui résulte de cette suppression, nous aurons

$$R = fm'\left(\frac{r^2}{r'^3}Q_1 + \frac{r^3}{r'^4}Q_2 + \frac{r^4}{r'^5}Q_3 + \ldots\right),$$

ou bien

$$\frac{R}{n'^2 a'^3} = \frac{r^2}{r'^3}Q_1 + \frac{r^3}{r'^4}Q_2 + \frac{r^4}{r'^5}Q_3 + \ldots$$

Si maintenant, à l'aide des formules du mouvement elliptique, on exprime à la manière ordinaire les diverses parties de R par des séries de cosinus d'angles multiples de l, ϖ, ϑ, l', ϖ', ϑ', les coefficients de ces cosinus étant des fonctions de a, e, γ, a', e', γ' developpées elles-mêmes suivant les puissances croissantes de e, γ, e', γ', $\frac{a}{a'}$, on aura formé ce qu'on appelle le *développement de la fonction perturbatrice*.

On négligera ici les parties de ce développement qui contiennent des puissances de γ' supérieures à la seconde. Si l'on observe d'ailleurs qu'un terme dont l'argument renferme $i\theta'$ a nécessairement dans son coefficient le facteur γ'^i ou le produit de ce facteur par une puissance positive et paire de γ', on voit que la partie R_1 de la fonction perturbatrice dont nous avons besoin dans cette Section se présentera sous la forme

$$R_1 = n'^2 \varepsilon a^2 [U + V\gamma'^2 + X\gamma' \cos(\theta - \theta') + Y\gamma'^2 \cos(2\theta - 2\vartheta')],$$

U, V, X, Y désignant des séries qui procèdent suivant les puissances de e, γ, e', $\frac{a}{a'}$.

Les petites quantités e, γ, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ étant regardées comme du premier degré [*], j'ai calculé les valeurs de U, V, X, Y en négligeant les termes du dixième degré dans U, V, Y, et ceux du neuvième dans X. Pour abréger, je ne transcris pas ici ces développements; mais je les suppose formés, et il sera aisé de les retrouver.

Adoptons pour éléments du mouvement elliptique de la Lune les six quantités γ, θ, e, ϖ, a, λ; les formules qui expriment les dérivées de ces éléments par rapport au temps en fonction des dérivées partielles de R se déduisent des équations de la page 16, en ayant égard à

[*] C'est pour éviter la confusion que je me sers ici du mot *degré* au lieu du mot *ordre*, qui serait plus conforme à l'usage : ce dernier sera employé, en effet, dans une autre acception, et nous dirons qu'une grandeur est de l'ordre i, quand elle sera comparable à γ'^i.

la relation $\gamma = \sin\frac{\varphi}{2}$; on trouve ainsi :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\theta} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{d\varpi} + \frac{dR}{d\lambda}\right),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\gamma},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR}{d\varpi} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dR}{d\lambda},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\gamma} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR}{de},$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{dR}{d\lambda};$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2}{na}\frac{dR}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dR}{de} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\gamma}.$$

Si maintenant nous réduisons R à la fonction R_1, qui ne contient ni ϖ ni λ, ces formules deviendront

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\theta},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\gamma},$$

$$\frac{de}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\gamma} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR_1}{de},$$

$$\frac{da}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2}{na}\frac{dR_1}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dR_1}{de} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\gamma};$$

et à l'aide de ces équations où γ' et θ' doivent être regardées comme des fonctions connues du temps, il faudra trouver les valeurs de γ, θ, e, ϖ, a, λ [*].

[*] Dans tout ce qui va suivre, e' et ϖ' seront traitées comme des constantes. Nous ne nous proposons pas en effet de reprendre ici le calcul de la partie de l'accélération séculaire qui dépend de la déformation de l'orbite terrestre, nous en référant à cet égard aux travaux déjà mentionnés de MM. Adams et Delaunay.

C'est ce que nous allons faire en développant les inconnues en séries dont les termes soient des ordres 1, 2, 3,..., la quantité γ' étant regardée comme du premier ordre; il suffira d'ailleurs, pour notre objet, de pousser ces développements jusqu'au second ordre.

Remarquons d'abord qu'en vertu de la troisième et de la cinquième équation, a et e sont des constantes et ne doivent plus compter parmi les inconnues. Il en est de même de n, en vertu de la relation

$$n^2 a^3 = f(\mathrm{M} + m).$$

Les deux premières équations ne contiennent donc que deux inconnues γ, θ et peuvent être traitées séparément. Si l'on négligeait γ', la première se réduirait à $\frac{d\gamma}{dt} = 0$, d'où l'on conclurait $\gamma = \text{const.}$; alors l'autre donnerait $\frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$, et, par suite, $\theta =$ une fonction linéaire du temps. En partant de cette solution comme d'une première approximation, on formera des valeurs plus approchées de γ et de θ, où l'approximation devra être poussée jusqu'aux quantités du second ordre. Ces valeurs étant obtenues, la quatrième et la sixième de nos équations différentielles nous donneront ϖ et λ par de simples quadratures.

Entrons maintenant dans le détail des calculs qui viennent d'être indiqués. Posons

$$\gamma' \sin\theta' = u, \quad \gamma' \cos\theta' = v;$$

la valeur de R_1 pourra s'écrire

$$\mathrm{R}_1 = n'^2 \varepsilon a^2 \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{U} + \mathrm{X}(u\sin\theta + v\cos\theta) + \mathrm{V}(u^2 + v^2) \\ &+ 2\mathrm{Y}\left[\frac{1}{2}(v^2 - u^2)\cos 2\theta + uv\sin 2\theta\right] \end{aligned} \right\}.$$

Mais la théorie des inégalités séculaires du mouvement des planètes donne les valeurs de u et de v, développées suivant les puissances du temps; écrivons-les

$$u = \mathrm{A}t + \mathrm{A}_1 t^2, \quad v = \mathrm{B}t + \mathrm{B}_1 t^2,$$

formules où A et B doivent être considérées comme des quantités du premier ordre, A_1 et B_1 comme des quantités du deuxième ordre [*]. On n'y a pas conservé les termes en t^3, t^4,..., lesquels seraient respectivement du troisième, du quatrième,... ordre, par la raison que les parties de la longitude que nous cherchons sont du second ordre.

En substituant dans R_1 ces valeurs de u et de v, et négligeant toujours les quantités du troisième ordre, on trouve

$$\begin{aligned}R_1 = n'^2\varepsilon a^2 \Big\{ & U + X(A\sin\theta + B\cos\theta)t \\ & + X(A_1\sin\theta + B_1\cos\theta)t^2 + V(A^2+B^2)t^2 \\ & + 2Y\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos 2\theta + AB\sin 2\theta\right]t^2\Big\}:\end{aligned}$$

les équations

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{4na^2\eta\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\theta},\quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4na^2\eta\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\eta}$$

deviennent, par suite,

$$(7)\quad \begin{aligned}\frac{d\eta}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{4n\eta}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\Big\{ & X(A\cos\theta - B\sin\theta)t \\ & + X(A_1\cos\theta - B_1\sin\theta)t^2 \\ & - 4Y\Big[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin 2\theta \\ & \qquad - AB\cos 2\theta\Big]t^2\Big\},\end{aligned}$$

$$(8)\quad \begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{n'^2\varepsilon}{4n\eta}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\Big\{ & U' + X'(A\sin\theta + B\cos\theta)t \\ & + X'(A_1\sin\theta + B_1\cos\theta)t^2 \\ & + V'(A^2+B^2)t^2 \\ & + 2Y'\Big[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos 2\theta \\ & \qquad + AB\sin 2\theta\Big]t^2\Big\},\end{aligned}$$

[*] On remarquera que les lettres A et B reçoivent ici et conserveront dans le reste du Mémoire une signification différente de celles qu'elles ont reçues précédemment, soit p. 17, soit encore p. 20.

où il faut entendre par U′, V′, X′, Y′ les dérivées de U, V, X, Y prises par rapport à γ, sans faire varier a, a', e, e'.

Lorsqu'on néglige γ', c'est-à-dire quand on suppose nulles les quantités A, B, A_1, B_1, on a

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \gamma = \gamma_0,$$

γ_0 désignant une constante, et en même temps

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{U'}{\gamma}\right)_0,$$

en convenant d'indiquer par l'indice zéro ce que devient une fonction de γ quand on y remplace γ par la constante γ_0 : on conclut de là, en intégrant,

$$\theta = \text{const.} - \frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{U'}{\gamma}\right)_0 t.$$

Représentons par θ_0 cette valeur approchée de θ, et, pour approcher davantage de nos deux inconnues, posons

$$\gamma = \gamma_0 + \delta_1\gamma + \delta_2\gamma + \ldots, \quad \theta = \theta_0 + \delta_1\theta + \delta_2\theta + \ldots,$$

$\delta_1\gamma$ et $\delta_1\theta$ étant du premier ordre, $\delta_2\gamma$ et $\delta_2\theta$ du deuxième, etc. Substituons ces valeurs dans les équations (γ) et (θ), et égalons séparément les quantités d'un même ordre dans les deux membres de chaque équation; si nous posons, pour abréger,

$$A\cos\theta_0 - B\sin\theta_0 = p, \quad A\sin\theta_0 + B\cos\theta_0 = q,$$
$$A_1\cos\theta_0 - B_1\sin\theta_0 = p_1, \quad A_1\sin\theta_0 + B_1\cos\theta_0 = q_1,$$

$$\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos 2\theta_0 - AB\sin 2\theta_0 = P, \quad \frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin 2\theta_0 - AB\cos 2\theta_0 = Q,$$

nous trouverons

$$(\gamma_1) \quad \frac{d\delta_1\gamma}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{X}{\gamma}\right)_0 pt,$$

$$(\theta_1) \quad \frac{d\delta_1\theta}{dt} = -\frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)_0 \delta_1\gamma + \left(\frac{X'}{\gamma}\right)_0 qt\right],$$

$$(\gamma_2)\left\{\begin{aligned}\frac{d\delta_2\gamma}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\Bigg[\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{X}{\gamma}\right)_0 pt\,\delta_1\gamma - \left(\frac{X}{\gamma}\right)_0 qt\,\delta_1\theta \\ + \left(\frac{X}{\gamma}\right)_0 p_1 t^2 - 4\left(\frac{Y}{\gamma}\right)_0 Qt^2\Bigg],\end{aligned}\right.$$

$$(\theta_2)\left\{\begin{aligned}\frac{d\delta_2\theta}{dt} = -\frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\Bigg[\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)_0 \delta_2\gamma \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{d\gamma^2}\frac{U'}{\gamma}\right)_0 \delta_1\gamma^2 + \left(\frac{d}{d\gamma}\frac{X}{\gamma}\right)_0 qt\,\delta_1\gamma \\ + \left(\frac{X'}{\gamma}\right)_0 pt\,\delta_1\theta + \left(\frac{X'}{\gamma}\right)_0 q_1 t^2 \\ + \left(\frac{Y'}{\gamma}\right)_0 (A^2+B^2)\,t^2 + 2\left(\frac{Y'}{\gamma}\right)_0 Pt^2\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Observons que p et q sont des quantités du premier ordre, que p_1, q_1, P, Q sont du deuxième, et qu'on a les relations

$$p^2 = \frac{1}{2}(A^2+B^2) - P,\quad q^2 = \frac{1}{2}(A^2+B^2)+P,\quad pq = -Q;$$

ajoutons que l'angle θ_0 étant une fonction linéaire de t, les intégrales $\int p\,dt$, $\int pt\,dt$, $\int pt^2\,dt$, $\int q\,dt$, $\int qt\,dt$, $\int qt^2\,dt$, $\int p_1\,dt$, $\int p_1 t\,dt$, $\int p_1 t^2\,dt$, $\int q_1\,dt$, $\int q_1 t\,dt$, $\int q_1 t^2 dt$, $\int P\,dt$, $\int Pt\,dt$, $\int Pt^2\,dt$, $\int Q\,dt$, $\int Qt\,dt$, $\int Qt^2\,dt$ s'obtiendront, soit immédiatement, soit au moyen de l'intégration par partie.

Nous pourrons, d'après cela, trouver $\delta_1\gamma$ en intégrant l'équation (γ_1), puis substituer la valeur de $\delta_1\gamma$ dans l'équation (θ_1) et intégrer cette dernière qui nous fera connaître $\delta_1\theta$. Intégrant ensuite l'équation (γ_2) après y avoir porté les valeurs de $\delta_1\gamma$ et de $\delta_1\theta$, nous obtiendrons $\delta_2\gamma$, et, pour avoir $\delta_2\theta$, il ne restera plus qu'à intégrer l'équation (θ_2), après y avoir remplacé $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_2\gamma$ par leurs valeurs. On trouve ainsi

$$\delta_1\gamma = -\left(\frac{X}{U'}\right)_0 qt + \frac{4n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma X}{U'^2}\right)_0 p,$$

$$\delta_1\theta = -\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma X}{U'}\right)_0 pt - \frac{4n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^2 X}{U'^2}\right)_0 q,$$

$$
\begin{aligned}
\delta_2\gamma = {} & \left(\frac{1}{4\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma X^2}{U'^2}\right)_0 (A^2+B^2)t^2 \\
& - \left(\frac{X}{U'}\right)_0 q_1 t^2 + \frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac12}\left(\frac{\gamma X}{U'^2}\right)_0 p_1 t \\
& + \frac{32n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left(\frac{\gamma^2 X}{U'^3}\right)_0 q_1 - \frac{2}{U'_0}\left(\frac{X^2}{4\gamma^2}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^2}{U'}+Y\right)_0 P t^2 \\
& - \frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac12}\left(\frac{\gamma}{U'^2}\right)_0\left(\frac{X^2U'^2}{4\gamma^5}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^5}{U'^3}+Y\right)_0 Q t \\
& + \frac{16n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left(\frac{\gamma^2}{U'^3}\right)_0\left(\frac{X^2U'^2}{4\gamma^5}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^5}{U'^3}+Y\right)_0 P,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_2\theta = {} & \frac{n'^2\varepsilon}{12n}(1-e^2)^{-\frac12}\left[\frac{1}{4\gamma}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma X^2}{U'}\right)-\frac{V'}{\gamma}\right]_0 (A^2+B^2)t^3 \\
& - \frac{n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac12}\left(\frac{\gamma^2X^2}{U'^4}\frac{d^2}{d\gamma^2}\frac{U'}{\gamma}\right)_0 (A^2+B^2)t \\
& - \left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma X}{U'}\right)_0 p_1 t^2 \\
& - \frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac12}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^2 X}{U'^2}\right)_0 q_1 t \\
& + \frac{32n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^3 X}{U'^3}\right)_0 p_1 \\
& + \left[\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma Y}{U'}+\frac{\gamma^3X^2}{4U'^4}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{U'}{\gamma^2}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)+\frac{X'^2}{2\gamma^2U'}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^2X}{U'X'}\right]_0 Q t^2 \\
& - \frac{2n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac12}\left[\frac{2}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^2Y}{U'^2}+\frac{\gamma^9X^2}{2U'^8\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)^2}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^4\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)^3}{\gamma^7}\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{X'^3}{\gamma^4X}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^5X^2}{U'^3X'^2}\right]_0 P t \\
& - \frac{4n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left[\frac{2}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^3Y}{U'^3}+\frac{\gamma^{15}X^2}{2U'^{12}\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^7\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)^5}{\gamma^{12}}\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{X'^3}{\gamma^3U'X}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^5X^2}{U'^3X'^2}\right]_0 Q.
\end{aligned}
$$

En ajoutant à γ_0 les valeurs de $\delta_1\gamma$ et de $\delta_2\gamma$ qu'on vient d'écrire, on aura la valeur de γ. De même, en ajoutant à la valeur de θ_0, savoir :

$$\theta_0 = \text{const.} - \frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{U'}{\gamma}\right)_0 t,$$

les valeurs de $\delta_1\theta$ et de $\delta_2\theta$ qu'on vient d'obtenir, on aura l'expression de θ. Il reste à former celles de λ et de ϖ.

Or, en se reportant aux valeurs de $\frac{d\lambda}{dt}$ et de $\frac{d\varpi}{dt}$ (p. 24), et en ayant égard à la valeur de R_1 (p. 25), on voit que si l'on pose

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2U}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{dU}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dU}{d\gamma} = \Omega,$$

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2V}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{dV}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dV}{d\gamma} = \Psi,$$

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2X}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{dX}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dX}{d\gamma} = \Xi,$$

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2Y}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{dY}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dY}{d\gamma} = \Upsilon,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dU}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dU}{d\gamma} = \omega,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dV}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dV}{d\gamma} = \psi,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dX}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dX}{d\gamma} = \xi,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dY}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dY}{d\gamma} = \upsilon,$$

on aura

$$(\lambda)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big\{ & \Omega + \Xi(u\sin\theta + v\cos\theta) + \Psi(u^2+v^2) \\ & + 2\Upsilon\left[\frac{1}{2}(v^2-u^2)\cos 2\theta + uv\sin 2\theta\right]\Big\}. \end{aligned}\right.$$

$$(\varpi)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varpi}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big\{ & \omega + \xi(u\sin\theta + v\cos\theta) + \psi(u^2+v^2) \\ & + 2\upsilon\left[\frac{1}{2}(v^2-u^2)\cos 2\theta + uv\sin 2\theta\right]\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Les quantités Ω, Ψ, Ξ, Υ, ω, ψ, ξ, υ sont des fonctions de γ, et leurs dérivées, par rapport à cette variable, seront désignées à l'aide d'accents. A l'aide des développements de U, V, X, Y, suivant les puissances de e, γ, e', $\frac{a}{a'}$, il est aisé de former ceux de Ω, Ψ, Ξ, Υ, ω, ψ, ξ, υ; je ne les transcrirai pas pour abréger; je ferai seulement remarquer que, d'après le degré d'approximation avec lequel ont été calculés U, V, X, Y, les termes négligés seront du dixième degré dans Ω et dans Ψ; du huitième, dans Ξ, Υ, ω, ψ; du sixième, dans ξ et dans υ.

Si maintenant, dans les premiers membres des équations (λ) et (ϖ), on remplace λ et ϖ par $\lambda_0 + \partial_1\lambda + \partial_2\lambda$, $\varpi_0 + \partial_1\varpi + \partial_2\varpi$, en sorte que λ_0 et ϖ_0 soient de l'ordre zéro, $\partial_1\lambda$ et $\partial_1\varpi$ du premier ordre, $\partial_2\lambda$ et $\partial_2\varpi$ du second; si de plus, dans les seconds membres des mêmes équations, on remplace u par $At + A_1t^2$, v par $Bt + B_1t^2$, γ par $\gamma_0 + \partial_1\gamma + \partial_2\gamma$, θ par $\theta_0 + \partial_1\theta + \partial_2\theta$, et qu'on égale les parties du même ordre dans chaque membre, on trouvera

$$\frac{d\lambda_0}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Omega_0,$$

$$\frac{d\partial_1\lambda}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}(\Omega'_0\,\partial_1\gamma + \Xi_0 qt),$$

$$\frac{d\partial_2\lambda}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[\Omega'_0\,\partial_2\gamma + \frac{1}{2}\Omega''_0\,\partial_1\gamma^2 + \Xi_0 q_1 t^2 + \Xi'_0 qt\,\partial_1\gamma + \Xi_0 pt\,\partial_1\theta + \Psi_0(A^2+B^2)t^2 + 2\Upsilon_0 Pt^2\Big].$$

$$\frac{d\varpi_0}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\omega_0,$$

$$\frac{d\partial_1\varpi}{dt} = \frac{n'\varepsilon}{n}(\omega'_0\,\partial_1\gamma + \xi_0 qt),$$

$$\frac{d\partial_2\varpi}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[\omega'_0\,\partial_2\gamma + \frac{1}{2}\omega''_0\,\partial_1\gamma^2 + \xi_0 q_1 t^2 + \xi'_0 qt\,\partial_1\gamma + \xi_0 pt\,\partial_1\theta + \psi_0(A^2+B^2)t^2 - 2\upsilon_0 Pt^2\Big].$$

Intégrons maintenant ces équations, après avoir remplacé dans les seconds membres $\delta_1\gamma$, $\delta_2\gamma$, $\delta_1\theta$ par leurs valeurs (p. 28 et 29), il viendra

$$\lambda_0 = \text{const.} + \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Omega_0 t,$$

$$\delta_1\lambda = 4(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0\left(\Xi - \frac{\Omega' X}{U'}\right)_0 pt + \frac{16n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^2\left(\Xi - 2\frac{\Omega' X}{U'}\right)_0 q,$$

$$\begin{aligned}
\delta_2\lambda = {} & \frac{n'^2\varepsilon}{12n}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma\Omega' X^2}{U'^2} - \frac{2}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma\Xi X}{U'} + 4\Psi\right)_0 (A^2+B^2)t^3 \\
& + \frac{4n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma^2\Omega'' X^2}{U'^4}\right)_0 (A^2+B^2)t \\
& + 4(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0\left(\Xi - \frac{\Omega' X}{U'}\right)_0 p_1 t^2 \\
& + \frac{32n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^2\left(\Xi - \frac{2\Omega' X}{U'}\right)_0 q_1 t \\
& - \frac{128n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^3\left(\Xi - \frac{3\Omega' X}{U'}\right)_0 p_1 \\
& - 2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2\gamma\Omega' Y}{U'^2} + \frac{\gamma^3 X^2}{2U'^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'\Omega'}{\gamma^2}\right. \\
& \qquad \left. - \frac{\gamma^2 X^2}{U'^3}\frac{d}{d\gamma}\frac{\Xi U'}{\gamma X} + \frac{2\gamma}{U'}\Upsilon\right)_0 Q t^2 \\
& + \frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(-\frac{4\gamma^2\Omega' Y}{U'^3} + \frac{\gamma^9 X^2}{2U'^8\Omega'^2}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^4\Omega'^3}{\gamma^7}\right. \\
& \qquad \left. - \frac{\gamma^3 X^3}{U'^6\Xi}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^3\Xi^2}{\gamma^3 X^2} + \frac{2\gamma^2}{U'^2}\Upsilon\right)_0 Pt \\
& + \frac{16n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{6\gamma^3\Omega' Y}{U'^4} + \frac{\gamma^{15} X^2}{2U'^{12}\Omega'^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^7\Omega'^5}{\gamma^{12}}\right. \\
& \qquad \left. - \frac{\gamma^6 X^3}{U'^7\Xi}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^3\Xi^2}{\gamma^3 X^2} + \frac{2\gamma^3}{U'^3}\Upsilon\right)_0 Q;
\end{aligned}$$

$$\varpi = \text{const.} + \frac{n'^2\varepsilon}{n}\omega_0 t,$$

$$\delta_1\varpi = 4(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0\left(\xi - \frac{\omega' X}{U'}\right)_0 pt + \frac{16n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^2\left(\xi - \frac{2\omega' X}{U'}\right)_0 q,$$

$$\begin{aligned}
\delta_2 \varpi = {} & \frac{n'^2 \varepsilon}{12 n} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} \frac{\gamma \omega' X^2}{U'^2} - \frac{2}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} \frac{\gamma \xi X}{U'} + 4\psi \right)_0 (A^2 + B^2) t^3 \\
& + \frac{4n}{n'^2 \varepsilon} (1 - e^2) \left(\frac{\gamma^2 \omega'' X^2}{U'^4} \right)_0 (A^2 + B^2) t \\
& + 4 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{U'} \right)_0 \left(\xi - \frac{\omega' X}{U'} \right)_0 p_1 t^2 \\
& + \frac{32 n}{n'^2 \varepsilon} (1 - e^2) \left(\frac{\gamma}{U'} \right)_0^2 \left(\xi - \frac{2 \omega' X}{U'} \right)_0 q_1 t \\
& - \frac{128 n^2}{n'^4 \varepsilon^2} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\gamma}{U'} \right)_0^3 \left(\xi - \frac{3 \omega' X}{U'} \right)_0 p_1 \\
& - 2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \left(- \frac{2 \gamma \omega' Y}{U'^4} + \frac{\gamma^3 X^2}{2 U'^4} \frac{d}{d\gamma} \frac{U' \omega'}{\gamma^4} \right. \\
& \qquad \left. - \frac{\gamma^2 X^2}{U'^3} \frac{d}{d\gamma} \frac{U' \xi}{\gamma X} + \frac{2\gamma}{U'} \upsilon \right)_0 Q t^2 \\
& + \frac{8n}{n'^2 \varepsilon} (1 - e^2) \left(- \frac{4 \gamma^2 \omega' Y}{U'^5} + \frac{\gamma^9 X^2}{2 U'^8 \omega'^2} \frac{d}{d\gamma} \frac{U'^4 \omega'^3}{\gamma^7} \right. \\
& \qquad \left. - \frac{\gamma^5 X^3}{U'^6 \xi} \frac{d}{d\gamma} \frac{U'^3 \xi^2}{\gamma^3 X^2} + \frac{2 \gamma^2}{U'^2} \upsilon \right)_0 P t \\
& + \frac{16 n^2}{n'^4 \varepsilon^2} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \left(- \frac{6 \gamma^3 \omega' Y}{U'^4} + \frac{\gamma^{15} X^2}{2 U'^{12} \omega'^4} \frac{d}{d\gamma} \frac{U'^7 \omega'^5}{\gamma^{12}} \right. \\
& \qquad \left. - \frac{\gamma^6 X^3}{U'^7 \xi} \frac{d}{d\gamma} \frac{U'^3 \xi^2}{\gamma^3 X^2} + \frac{2 \gamma^3}{U'^3} \upsilon \right) Q.
\end{aligned}$$

Il reste à substituer pour U, V, X, Y, Ω, Ψ, Ξ, Υ, ω, ψ, ξ, υ leurs valeurs en fonction de γ, e, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$; faisons d'abord cette substitution dans les valeurs de θ_0, λ_0, ϖ_0; nous obtiendrons les formules

$$\theta_0 = c_1 + h_0 t, \quad \lambda_0 = c_2 + k_0 t, \quad \varpi_0 = c_3 + j_0 t,$$

où c_1, c_2, c_3 désignent des constantes et où l'on a

$$\begin{aligned}
h_0 = - \frac{3}{4} \frac{n'^2 \varepsilon}{n} \Big[& 1 - 2\gamma_0^2 + 2e^2 + \frac{3}{2} e'^2 - 4 e^2 \gamma_0^2 - 3 e'^2 \gamma_0^2 + \frac{9}{8} e^4 + 3 e^2 e'^2 + \frac{15}{8} e'^4 + \frac{15}{8} \frac{a^2}{a'^2} \\
& - \frac{9}{4} e^4 \gamma_0^2 - 6 e^2 e'^2 \gamma_0^2 - \frac{15}{4} e'^4 \gamma_0^2 + \frac{7}{8} e^6 + \frac{27}{16} e^4 e'^2 + \frac{15}{4} e^2 e'^4 + \frac{35}{16} e'^6 \\
& - \frac{135}{8} \frac{a^2}{a'^2} \gamma_0^2 + \frac{165}{16} \frac{a^2}{a'^2} e^2 + \frac{75}{8} \frac{a^2}{a'^2} e'^2 + (8) \Big],
\end{aligned}$$

$$k_0 = -\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[1 - \frac{9}{2}\gamma_0^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma_0^4 - \frac{15}{4}e^2\gamma_0^2 - \frac{27}{4}e'^2\gamma_0^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4$$

$$+ \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{3}{4}e^2\gamma_0^4 + \frac{9}{2}e'^2\gamma_0^4 + \frac{9}{8}e^4\gamma_0^2 - \frac{45}{8}e^2e'^2\gamma_0^2 - \frac{135}{16}e'^4\gamma_0^2 + \frac{3}{64}e^6$$

$$+ \frac{9}{64}e^4e'^2 + \frac{135}{64}e^2e'^4 + \frac{35}{16}e'^6 - \frac{315}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{315}{64}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2$$

$$- \frac{45}{16}e^4\gamma_0^4 + \frac{9}{8}e^2e'^2\gamma_0^4 + \frac{45}{8}e'^4\gamma_0^4 + \frac{33}{32}e^6\gamma_0^2 + \frac{27}{16}e^4e'^2\gamma_0^2 - \frac{225}{32}e^2e'^4\gamma_0^2$$

$$- \frac{315}{32}e'^6\gamma_0^2 + \frac{15}{512}e^8 + \frac{9}{128}e^6e'^2 + \frac{45}{256}e^4e'^4 + \frac{315}{128}e^2e'^6 + \frac{315}{128}e'^8$$

$$+ \frac{1215}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^4 - \frac{2655}{32}\frac{a^2}{a'^2}e^2\gamma_0^2 - \frac{1575}{16}\frac{a^2}{a'^2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{225}{128}\frac{a^2}{a'^2}e^4$$

$$+ \frac{1575}{64}\frac{a^2}{a'^2}e^2e'^2 + \frac{945}{64}\frac{a^2}{a'^2}e'^4 + \frac{75}{64}\frac{a^4}{a'^4} + (10)\Big],$$

$$l_0 = \frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[1 - 8\gamma_0^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 10\gamma_0^4 - e^2\gamma_0^2 - 12e'^2\gamma_0^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{3}{4}e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4$$

$$+ \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} + 5e^2\gamma_0^4 + 15e'^2\gamma_0^4 - \frac{3}{2}e^4\gamma_0^2 - \frac{3}{2}e^2e'^2\gamma_0^2 - 15e'^4\gamma_0^2 - \frac{1}{16}e^6$$

$$- \frac{3}{16}e^4e'^2 - \frac{15}{16}e^2e'^4 + \frac{35}{16}e'^6 - \frac{165}{4}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{15}{32}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{75}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big].$$

Faisons ensuite les mêmes substitutions dans $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1\lambda$, $\delta_1\varpi$, $\delta_2\gamma$, $\delta_2\theta$, $\delta_2\lambda$, $\delta_2\varpi$; puis rassemblons les parties qui composent chacune de nos inconnues γ, θ, λ, ϖ, d'après les formules

$$\gamma = \gamma_0 + \delta_1\gamma + \delta_2\gamma,$$
$$\theta = \theta_0 + \delta_1\theta + \delta_2\theta,$$
$$\lambda = \lambda_0 + \delta_1\lambda + \delta_2\lambda,$$
$$\varpi = \varpi_0 + \delta_1\varpi + \delta_2\varpi;$$

les seconds membres des trois dernières formules renfermeront chacun une partie qui sera fonction linéaire du temps; nous représenterons ces trois fonctions linéaires par θ^0, λ^0, ϖ^0. On aura alors

$$\theta^0 = c_1 + h^0 t, \quad \lambda^0 = c_2 + k^0 t, \quad \varpi^0 = c_3 + j^0 t.$$

en faisant

$$h^0 = h_0 + \frac{1}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[1 + 3\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + 8\gamma_0^4 - 6e^2\gamma_0^2 - \frac{9}{2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2 + \frac{3}{8}e'^4 + \frac{75}{16}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\Big](A^2 + B^2),$$

$$k^0 = k_0 + \frac{1}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[3 - 3\gamma_0^2 - \frac{19}{2}e^2 - \frac{9}{2}e'^2 - 12\gamma_0^4 + \frac{33}{2}e^2\gamma_0^2 + \frac{9}{2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{37}{2}e^4 + \frac{57}{4}e^2e'^2 + \frac{9}{8}e'^4 + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} - 36\gamma_0^6 + 59e^2\gamma_0^4 + 18e'^2\gamma_0^4 - \frac{153}{4}e^4\gamma_0^2 - \frac{99}{4}e^2e'^2\gamma_0^2 - \frac{9}{8}e'^4\gamma_0^2 - \frac{545}{16}e^6 - \frac{111}{4}e^4e'^2 - \frac{57}{16}e^2e'^4 + \frac{3}{16}e'^6 - \frac{1395}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 - \frac{15}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big](A^2 + B^2),$$

$$j^0 = j_0 - \frac{16}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[1 - \frac{9}{2}\gamma_0^2 - \frac{31}{8}e^2 - \frac{3}{2}e'^2 - \frac{29}{2}\gamma_0^4 + \frac{117}{8}e^2\gamma_0^2 + \frac{27}{4}e'^2\gamma_0^2 + \frac{151}{16}e^4 + \frac{93}{16}e^2e'^2 + \frac{3}{8}e'^4 + \frac{45}{32}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\Big](A^2 + B^2).$$

Cela posé, les valeurs complètes de γ, θ, ϖ, λ seront

$$\gamma = \gamma_0 + \mathcal{L}\,qt + \mathfrak{M}\,p + \mathfrak{N}\,(A^2 + B^2)t^2 + \mathcal{L}\,q_1t^2 + 2\mathfrak{M}\,p_1t + \mathcal{Q}\,q_1 + \mathcal{R}\,Pt^2 + \mathcal{S}\,Qt + \mathcal{T}\,P,$$
$$\theta = \theta^0 + \mathcal{L}'pt + \mathfrak{M}'q + \mathfrak{N}'(A^2 + B^2)t^3 + \mathcal{L}'p_1t^2 + 2\mathfrak{M}'q_1t + \mathcal{Q}'p_1 + \mathcal{R}'Qt^2 + \mathcal{S}'Pt + \mathcal{T}'Q,$$
$$\varpi = \varpi^0 + \mathcal{L}''pt + \mathfrak{M}''q + \mathfrak{N}''(A^2 + B^2)t^3 + \mathcal{L}''p_1t^2 + 2\mathfrak{M}''q_1t + \mathcal{Q}''p_1 + \mathcal{R}''Qt^2 + \mathcal{S}''Pt + \mathcal{T}''Q,$$
$$\lambda = \lambda^0 + \mathcal{L}'''pt + \mathfrak{M}'''q + \mathfrak{N}'''(A^2 + B^2)t^3 + \mathcal{L}'''p_1t^2 + 2\mathfrak{M}'''q_1t + \mathcal{Q}'''p_1 + \mathcal{R}'''Qt^2 + \mathcal{S}'''Pt + \mathcal{T}'''Q.$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\mathcal{L} = 1 - \frac{1}{2}\gamma_0^2 - \frac{1}{8}\gamma_0^4 - \frac{1}{16}\gamma_0^6 + (8),$$
$$\mathcal{L}' = \frac{1}{\gamma_0}\Big[1 - \frac{3}{2}\gamma_0^2 - \frac{5}{8}\gamma_0^4 - \frac{7}{16}\gamma_0^6 + (8)\Big],$$
$$\mathcal{L}'' = -2\gamma_0\Big[1 + \frac{1}{2}\gamma_0^2 + \frac{3}{8}\gamma_0^4 + (6)\Big],$$
$$\mathcal{L}''' = -2\gamma_0\Big[1 + \frac{1}{2}\gamma_0^2 + \frac{3}{8}\gamma_0^4 + \frac{5}{16}\gamma_0^6 + (8)\Big];$$

$$\mathfrak{M} = -\frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[1 + \frac{3}{2}\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + \frac{23}{8}\gamma_0^4 - 3e^2\gamma_0^2 - \frac{9}{4}e'^2\gamma_0^2 + \frac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2$$
$$+ \frac{3}{8}e'^4 - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{91}{16}\gamma_0^6 - \frac{23}{4}e^2\gamma_0^4 - \frac{69}{16}e'^2\gamma_0^4 + \frac{69}{16}e^4\gamma_0^2$$
$$+ \frac{9}{2}e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{9}{16}e'^4\gamma_0^2 - \frac{35}{8}e^6 - \frac{69}{16}e^4e'^2 - \frac{3}{4}e^2e'^4 + \frac{1}{16}e'^6$$
$$+ \frac{165}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 - \frac{45}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big],$$

$$\mathfrak{M}' = \frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\frac{1}{\gamma_0}\Big[1 + \frac{9}{2}\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + \frac{115}{8}\gamma_0^4 - 9e^2\gamma_0^2 - \frac{27}{4}e'^2\gamma_0^2 + \frac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2$$
$$+ \frac{3}{8}e'^4 - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{637}{16}\gamma_0^6 - \frac{115}{4}e^2\gamma_0^4 - \frac{345}{16}e'^2\gamma_0^4 + \frac{207}{16}e^4\gamma_0^2$$
$$+ \frac{27}{2}e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{27}{16}e'^4\gamma_0^2 - \frac{35}{8}e^6 - \frac{69}{16}e^4e'^2 - \frac{3}{4}e^2e'^4 + \frac{1}{16}e'^6$$
$$+ \frac{495}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 - \frac{45}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big],$$

$$\mathfrak{M}'' = -\frac{8}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0\Big[9 + \frac{21}{2}\gamma_0^2 - 33e^2 - \frac{27}{2}e'^2 + \frac{115}{8}\gamma_0^4 - \frac{87}{2}e^2\gamma_0^2 - \frac{63}{4}e'^2\gamma_0^2 + \frac{627}{8}e^4$$
$$+ \frac{99}{2}e^2e'^2 + \frac{27}{8}e'^4 + \frac{75}{8}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\Big],$$

$$\mathfrak{M}''' = \frac{8}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0\Big[5 + \frac{21}{2}\gamma_0^2 - 17e^2 - \frac{15}{2}e'^2 + \frac{307}{8}\gamma_0^4 - \frac{63}{2}e^2\gamma_0^2 - \frac{63}{4}e'^2\gamma_0^2 + \frac{273}{8}e^4$$
$$+ \frac{51}{2}e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 + \frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{1001}{16}\gamma_0^6 - \frac{575}{8}e^2\gamma_0^4 - \frac{621}{16}e'^2\gamma_0^4$$
$$+ \frac{957}{16}e^4\gamma_0^2 + \frac{189}{4}e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{63}{16}e'^4\gamma_0^2 - \frac{255}{4}e^6 - \frac{819}{16}e^4e'^2$$
$$- \frac{51}{8}e^2e'^4 + \frac{5}{16}e'^6 - \frac{165}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{15}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big];$$

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{4}\frac{1}{\gamma_0}[1 - 3\gamma_0^2 + (8)],$$
$$\mathfrak{N}' = \frac{n'^2\varepsilon}{n}(6),$$
$$\mathfrak{N}'' = \frac{n'^2\varepsilon}{n}(6),$$
$$\mathfrak{N}''' = \frac{n'^2\varepsilon}{n}(8);$$

$$\mathcal{Q} = -\frac{32}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\Big[1 + \frac{7}{2}\gamma_0^2 - 4e^2 - 3e'^2 + \frac{79}{8}\gamma_0^4 - 14e^2\gamma_0^2 - \frac{21}{2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{39}{4}e^4 + 12e^2e'^2$$

$$+ 3e'^4 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{407}{16}\gamma_0^6 - \frac{79}{2}e^2\gamma_0^4 - \frac{237}{8}e'^2\gamma_0^4 + \frac{273}{8}e^4\gamma_0^2$$

$$+ 42e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{21}{2}e'^4\gamma_0^2 - \frac{81}{4}e^6 - \frac{117}{4}e^4e'^2 - 12e^2e'^4 - e'^6$$

$$+ \frac{105}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big],$$

$$\mathcal{Q} = -\frac{32}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\frac{1}{\gamma_0}\Big[1 + \frac{21}{2}\gamma_0^2 - 4e^2 - 3e'^2 + \frac{395}{8}\gamma_0^4 - 42e^2\gamma_0^2 - \frac{63}{2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{39}{4}e^4$$

$$+ 12e^2e'^2 + 3e'^4 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{2849}{16}\gamma_0^6 - \frac{395}{2}e^2\gamma_0^4 - \frac{1185}{8}e'^2\gamma_0^4$$

$$+ \frac{819}{8}e^4\gamma_0^2 + 126e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{63}{2}e'^4\gamma_0^2 - \frac{81}{4}e^6 - \frac{117}{4}e^4e'^2 - 12e^2e'^4$$

$$- e'^6 + \frac{315}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big],$$

$$\mathcal{Q}' = \frac{64}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\gamma_0\Big[17 + \frac{105}{2}\gamma_0^2 - 98e^2 - 51e'^2 + \frac{1027}{8}\gamma_0^4 - 315e^2\gamma_0^2 - \frac{315}{2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{1323}{4}e^4$$

$$+ 294e^2e'^2 + 51e'^4 - \frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\Big],$$

$$\mathcal{Q}''' = -\frac{64}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\gamma_0\Big[11 + \frac{91}{2}\gamma_0^2 - 58e^2 - 33e'^2 + \frac{1185}{8}\gamma_0^4 - 231e^2\gamma_0^2 - \frac{273}{2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{699}{4}e^4$$

$$+ 174e^2e'^2 + 33e'^4 - \frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{6919}{16}\gamma_0^6 - \frac{2923}{4}e^2\gamma_0^4 - \frac{3555}{8}e'^2\gamma_0^4$$

$$+ \frac{5439}{8}e^4\gamma_0^2 + 693e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{273}{2}e'^4\gamma_0^2 - \frac{1703}{4}e^6 - \frac{2097}{4}e^4e'^2$$

$$- 174e^2e'^4 - 11e'^6 + \frac{525}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{135}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big];$$

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{2\gamma_0}[1 - \gamma_0^2 + (8)],$$

$$\mathcal{R}' = \frac{1}{\gamma_0^2}[1 - \gamma_0^2 + \gamma_0^4 + \gamma_0^6 + 45e'^4\gamma_0^2 + (8)],$$

$$\mathcal{R}'' = 2\gamma_0^2[1 + \gamma_0^2 + (4)],$$

$$\mathcal{R}''' = 2\gamma_0^2[1 + \gamma_0^2 + \gamma_0^4 + (6)];$$

$$\begin{aligned}
S = -\frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\frac{1}{\gamma_0}\Big[& 1 + 5\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + 14\gamma_0^4 - 10e^2\gamma_0^2 - \frac{15}{2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2 \\
& + \frac{3}{8}e'^4 - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} + 36\gamma_0^6 - 28e^2\gamma_0^4 - 21e'^2\gamma_0^4 + \frac{115}{8}e^4\gamma_0^2 \\
& + 15e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{15}{8}e'^4\gamma_0^2 - \frac{35}{8}e^6 - \frac{69}{16}e^4e'^2 - \frac{3}{4}e^2e'^4 + \frac{1}{16}e'^6 \\
& + 30\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 - \frac{45}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S' = -\frac{8}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\frac{1}{\gamma_0^2}\Big[& 1 + 3\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + 7\gamma_0^4 - 6e^2\gamma_0^2 - \frac{9}{2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2 \\
& + 3e'^4 - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} + 15\gamma_0^6 - 14e^2\gamma_0^4 - \frac{21}{2}e'^2\gamma_0^4 + \frac{69}{8}e^4\gamma_0^2 + 9e^2e'^2\gamma_0^2 \\
& + \frac{369}{8}e'^4\gamma_0^2 - \frac{35}{8}e^6 - \frac{69}{16}e^4e'^2 - \frac{33}{16}e^2e'^4 + \frac{1}{16}e'^6 + \frac{165}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 \\
& - \frac{45}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big],
\end{aligned}$$

$$S'' = \frac{16}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0^2\Big[1 + 5\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + (4)\Big],$$

$$\begin{aligned}
S''' = \frac{16}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0^2\Big[& 1 + 5\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + 17\gamma_0^4 - 10e^2\gamma_0^2 - \frac{15}{2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2 \\
& + \frac{3}{8}e'^4 + \frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\Big];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} = \frac{8}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\frac{1}{\gamma_0}\Big[& 1 + 7\gamma_0^2 - 4e^2 - 3e'^2 + 28\gamma_0^4 - 28e^2\gamma_0^2 - 21e'^2\gamma_0^2 + \frac{39}{4}e^4 + 12e^2e'^2 \\
& + 3e'^4 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2} + 92\gamma_0^6 - 112e^2\gamma_0^4 - 84e'^2\gamma_0^4 + \frac{273}{4}e^4\gamma_0^2 \\
& + 84e^2e'^2\gamma_0^2 + 21e'^4\gamma_0^2 - \frac{81}{4}e^6 - \frac{117}{4}e^4e'^2 - 12e^2e'^4 - e'^6 \\
& + \frac{105}{4}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}' = -\frac{16}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\frac{1}{\gamma_0^2}\Big[& 1 + 5\gamma_0^2 - 4e^2 - 3e'^2 + 21\gamma_0^4 - 20e^2\gamma_0^2 - 15e'^2\gamma_0^2 + \frac{39}{4}e^4 + 12e^2e'^2 \\
& + \frac{45}{8}e'^4 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2} + 77\gamma_0^6 - 84e^2\gamma_0^4 - 63e'^2\gamma_0^4 + \frac{195}{4}e^4\gamma_0^2 \\
& + 60e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{261}{4}e'^4\gamma_0^2 - \frac{81}{4}e^6 - \frac{117}{4}e^4e'^2 - \frac{297}{16}e^2e'^4 - \frac{79}{16}e'^6 \\
& + \frac{165}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big],
\end{aligned}$$

$$\mathcal{C}'' = \frac{32}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\gamma_0^2\left[19 + 93\gamma_0^2 - 106e^2 - 57e'^2 + (4)\right],$$

$$\mathcal{C}''' = -\frac{16}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\gamma_0^2\left[18 + 94\gamma_0^2 - 100e^2 - 54e'^2 + 354\gamma_0^4 - 516e^2\gamma_0^2 - 282e'^2\gamma_0^2 + \frac{621}{2}e^4 \right.$$
$$\left. + 300e^2e'^2 + 54e'^4 + \frac{405}{2}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\right].$$

Voyons ce que nous apprennent ces formules relativement à la question qui nous occupe. La quantité n étant constante, l'équation $l = \int n\,dt + \lambda$ se réduit ici à

$$l = nt + \lambda;$$

en mettant pour λ la valeur qu'on vient de trouver, on voit que le seul terme non périodique de la longitude moyenne qui ne se confonde pas avec le moyen mouvement est le terme $\mathfrak{M}'''(A^2 + B^2)t^3$ ou

$$\frac{n'^2\varepsilon}{n}(8)(A^2 + B^2)t^3.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'on fait abstraction de la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre et qu'on réduit la fonction R à sa partie non périodique et aux termes d'arguments $\theta - \theta'$ et $2\theta - 2\theta'$, le terme proportionnel au cube du temps, qu'on pourrait s'attendre à trouver dans la longitude moyenne de la Lune par suite du déplacement du plan de l'écliptique, est le produit de $\frac{n'^2\varepsilon}{n}(A^2 + B^2)t^3$ par un coefficient qui, s'il n'est pas nul, est au moins du huitième degré en γ_0, e, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$: par conséquent, ce terme est ou nul, ou insensible dans les limites des temps historiques [*].

La partie R_1 de la fonction perturbatrice était celle qui semblait devoir introduire dans l'accélération du mouvement de la Lune les

---

[*] Le facteur $\frac{n'^2\varepsilon}{n}(A^2 + B^2)$ est égal à $0'',00000063$ environ, quand on prend le siècle pour unité de temps.

termes les plus considérables parmi ceux qui dépendent du déplacement de l'écliptique, et on vient de voir au contraire qu'elle ne fournit que des termes nuls ou négligeables. Il nous reste à calculer les termes du même genre qu'amènera le rétablissement dans la fonction perturbatrice de la partie $R - R_1$ laissée d'abord de côté. Mais avant d'entreprendre cette recherche qui sera l'objet de la troisième Section, nous signalerons encore quelques conséquences des formules qui précèdent.

Dans les expressions de θ et de ϖ, les termes en t^3 sont les produits de $\frac{n'^2 \varepsilon}{n}(A^2 + B^2)t^3$ par des facteurs qui, s'ils ne sont pas nuls, sont au moins du sixième degré. Ainsi, quand on réduit R à sa partie R_1, le déplacement de l'écliptique n'amène, ni dans la longitude du nœud de la Lune, ni dans celle de son périgée, aucun terme sensible qui croisse comme le cube du temps.

Quant à l'élément γ qui est le sinus de la demi-inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan fixe, nous voyons qu'il renferme un terme séculaire dépendant du déplacement de l'écliptique, savoir :

$$\frac{1}{4\gamma_0}[1 - 3\gamma_0^2 + (8)](A^2 + B^2)t^2.$$

Il en résulte dans l'inclinaison φ elle-même un terme en t^2 qui est à peu près $+ 0'',031\, t^2$.

Examinons enfin si dans les mêmes hypothèses l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique mobile est affectée de quelque inégalité non périodique. Cette inclinaison étant désignée par i, faisons

$$\sin\frac{i}{2} = \eta.$$

Le triangle sphérique déterminé par le plan fixe, le plan de l'écliptique mobile et le plan de l'orbite lunaire, nous donnera l'équation

$$\cos i = \cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' \cos(\theta - \theta'),$$

ou bien

$$1 - 2\eta^2 = (1 - 2\gamma^2)(1 - 2\gamma'^2) + 4\gamma\gamma'\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\theta - \theta'),$$

ou encore

$$\eta^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 - 2\gamma^2\gamma'^2 - 2\gamma\gamma'\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\theta - \theta').$$

Remplaçons $\gamma'\sin\theta'$ et $\gamma'\cos\theta'$ par $At + A_1 t^2$ et $Bt + B_1 t^2$; il nous viendra, en négligeant des quantités du troisième ordre,

$$\begin{aligned}\eta^2 = \gamma^2 &- 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}(A\sin\theta + B\cos\theta)t \\ &- 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}(A_1\sin\theta + B_1\cos\theta)t^2 + (1-2\gamma^2)(A^2+B^2)t^2.\end{aligned}$$

Représentons par $\gamma_0 + \Delta\gamma$ et $\theta^0 + \Delta\theta$ les valeurs de γ et de θ que donnent les formules de la page 35; observons d'ailleurs que la différence $h^0 - h_0$ étant du second ordre, θ^0 et θ_0 ne diffèrent non plus que d'une quantité du second ordre, et nous aurons, en négligeant toujours des quantités du troisième ordre,

$$\begin{aligned}A\sin\theta + B\cos\theta &= A\sin\theta^0 + B\cos\theta^0 + (A\cos\theta^0 - B\sin\theta^0)\Delta\theta \\ &= A\sin\theta_0 + B\cos\theta_0 + (A\cos\theta_0 - B\sin\theta_0)\Delta\theta = q + p\Delta\theta,\end{aligned}$$

$$A_1\sin\theta + B_1\cos\theta = A_1\sin\theta^0 + B_1\cos\theta^0 = A_1\sin\theta_0 + B_1\cos\theta_0 = q_1.$$

La valeur de η^2 deviendra par suite

$$\begin{aligned}\eta^2 = \gamma_0^2 + 2\gamma_0\Delta\gamma + \Delta\gamma^2 - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,qt - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,pt\Delta\theta \\ - 2\frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}qt\Delta\gamma - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,q_1t^2 + (1-2\gamma_0^2)(A^2+B^2)t^2.\end{aligned}$$

Mais les valeurs de $\Delta\gamma$ et de $\Delta\theta$ peuvent s'écrire, d'après les formules qu'on vient de citer,

$\Delta\gamma = \mathcal{L}qt + \mathfrak{M}p + \mathfrak{N}(A^2+B^2)t^2 +$ des termes périodiques du second ordre,

$\Delta\theta = \mathcal{L}'pt + \mathfrak{M}'q +$ des termes du second ordre.

Il en résulte, aux quantités près du troisième ordre,

$$\begin{aligned}\eta^2 = \gamma_0^2 &+ 2\gamma_0 \mathfrak{L} qt + 2\gamma_0 \mathfrak{M} p + 2\gamma_0 \mathfrak{N}(A^2 + B^2) t^2 + \mathfrak{L}^2 q^2 t^2 + 2\mathfrak{L}\mathfrak{M} pqt \\ &+ \mathfrak{M}^2 p^2 - 2\gamma_0 \sqrt{1-\gamma_0^2}\, qt - 2\gamma_0 \sqrt{1-\gamma_0^2}\, \mathfrak{L}' p^2 t^2 - 2\gamma_0 \sqrt{1-\gamma_0^2}\, \mathfrak{M}' pqt \\ &- 2\frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}} \mathfrak{L} q^2 t^2 - 2\frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}} \mathfrak{M} pqt - 2\gamma_0 \sqrt{1-\gamma_0^2}\, q_1 t^2 \\ &+ (1-2\gamma_0^2)(A^2 + B^2) t^2 + \text{des termes périodiques du second ordre,}\end{aligned}$$

ce qui, en ayant égard aux relations

$$p^2 = \frac{1}{2}(A^2 + B^2) - P, \quad q^2 = \frac{1}{2}(A^2 + B^2) + P, \quad pq = -Q,$$

peut s'écrire encore

$$\begin{aligned}\eta^2 = \gamma_0^2 &+ 2\gamma_0 \left(\mathfrak{L} - \sqrt{1-\gamma_0^2}\right) qt + 2\gamma_0 \mathfrak{M} p \\ &+ \left(2\gamma_0 \mathfrak{N} + \frac{1}{2}\mathfrak{L}^2 - \gamma_0 \sqrt{1-\gamma_0^2}\, \mathfrak{L}' - \frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}} \mathfrak{L} + 1 - 2\gamma_0^2\right)(A^2 + B^2) t^2 \\ &+ \text{des termes du second ordre constants ou périodiques.}\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= 1 - \frac{1}{2}\gamma_0^2 - \frac{1}{8}\gamma_0^4 - \frac{1}{16}\gamma_0^6 + (8) = \sqrt{1-\gamma_0^2} + (8), \\ \mathfrak{N} &= \frac{1}{4\gamma_0}[1 - 3\gamma_0^2 + (8)], \\ \mathfrak{L}' &= \frac{1}{\gamma_0}\left[1 - \frac{3}{2}\gamma_0^2 - \frac{5}{8}\gamma_0^4 - \frac{7}{16}\gamma_0^6 + (8)\right],\end{aligned}$$

d'où il suit

$$\mathfrak{L} - \sqrt{1-\gamma_0^2} = (8),$$

$$2\gamma_0 \mathfrak{N} + \frac{1}{2}\mathfrak{L}^2 - \gamma_0 \sqrt{1-\gamma_0^2}\, \mathfrak{L}' - \frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}} \mathfrak{L} + 1 - 2\gamma_0^2 = (8):$$

donc

$$\begin{aligned}\eta^2 = \gamma_0^2 &+ (8)\gamma_0 qt + 2\gamma_0 \mathfrak{M} p + (8)(A^2 + B^2) t^2 \\ &+ \text{des termes du second ordre constants ou périodiques,}\end{aligned}$$

ou, en extrayant la racine carrée,

$$\eta = \gamma_0 + (8)\,qt + \mathfrak{M}p + \frac{(8)}{\gamma_0}(A^2 + B^2)\,t^2$$
$$+ \text{ des termes du second ordre constants ou périodiques.}$$

On voit que si η renferme un terme proportionnel au carré du temps, ce terme est le produit de $(A^2 + B^2)\,t^2$, c'est-à-dire de $0{,}0000000135\,t^2$, par un facteur qui est au moins du septième degré. Un pareil terme, s'il existe, doit être regardé comme insensible.

La même conclusion s'étend sans peine au terme en t^2, qui pourrait exister dans la valeur de l'angle i lié à η par la formule $\sin\frac{i}{2} = \eta$.

Ainsi, et en supposant toujours la fonction perturbatrice réduite à sa partie R_1, la proposition énoncée par Laplace, que le plan de l'orbite lunaire conserve une inclinaison moyenne constante sur le plan de l'écliptique mobile, subsiste même lorsqu'on pousse l'approximation relative aux petites quantités γ_0, e, e', $\frac{a}{a'}$, beaucoup plus loin que ne le fait l'auteur de la *Mécanique céleste*.

TROISIÈME SECTION.

Dans la Section précédente, on a intégré les équations différentielles du mouvement de la Lune en réduisant la fonction pertubatrice R à la partie R_1; il faut à présent tenir compte des autres termes de la fonction R, termes dont nous désignerons la somme par R_2, en sorte qu'on ait

$$R = R_1 + R_2.$$

Observons que les dérivées partielles $\frac{dR_1}{d\varpi}$, $\frac{dR_1}{d\lambda}$ sont nulles, et représentons par

$$\mathfrak{E},\quad \mathfrak{F},\quad \mathfrak{G},\quad \mathfrak{H}$$

les dérivées partielles

$$\frac{dR_1}{d\eta},\quad \frac{dR_1}{d\vartheta},\quad \frac{dR_1}{de},\quad \frac{dR_1}{da};$$

représentons d'ailleurs par

$$\mathrm{E},\quad \mathrm{F}\quad \mathrm{G},\quad \mathrm{H},\quad \mathrm{I},\quad \mathrm{J}$$

les dérivées partielles

$$\frac{d\mathrm{R}_2}{d\gamma},\quad \frac{d\mathrm{R}_2}{d\theta},\quad \frac{d\mathrm{R}_2}{de},\quad \frac{d\mathrm{R}_2}{d\varpi},\quad \frac{d\mathrm{R}_2}{da},\quad \frac{d\mathrm{R}_2}{d\lambda}.$$

Alors les expressions complètes des dérivées des éléments seront données par les équations

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathfrak{F} + \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J}),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E} - \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{H} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{J},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathcal{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{G},$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{na}\mathrm{J},$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2}{na}\mathfrak{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathcal{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E}$$
$$+ \frac{2}{na}\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E}.$$

Convenons maintenant d'employer les lettres γ, θ, ϖ, λ pour représenter les valeurs de ces quatre éléments qu'on obtient en supprimant la partie R_2 de R_1, valeurs qui sont données par les formules de la page 35; désignons d'ailleurs par a et e les constantes auxquelles se réduisent dans ce cas le demi-grand axe et l'excentricité. Enfin, représentons par $\gamma + \delta\gamma$, $\theta + \delta\theta$, $e + \delta e$, $\varpi + \delta\varpi$, $a + \delta a$, $\lambda + \delta\lambda$ les valeurs complètes des éléments, c'est-à-dire celles qu'ils acquièrent lorsqu'on rétablit dans la fonction perturbatrice la partie R_2.

En indiquant par la caractéristique δ l'accroissement qu'éprouve une fonction quelconque de γ, θ, e, ϖ, a, λ, lorsqu'on y remplace ces éléments par $\gamma+\delta\gamma$, $\theta+\delta\theta$, $e+\delta e$, $\varpi+\delta\varpi$, $a+\delta a$, $\lambda+\delta\lambda$, nous aurons

$$
(\mathrm{A})\quad\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\delta\gamma}{dt} &= \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J}) \\
&\quad + \delta\left[\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathcal{F} + \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2aa^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J})\right], \\
\frac{d\delta\theta}{dt} &= -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E} + \delta\left(-\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathcal{E} - \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E}\right), \\
\frac{d\delta e}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{aa^2e}\,\mathrm{H} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathrm{J} \\
&\quad + \delta\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\mathrm{H} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathrm{J}\right), \\
\frac{d\delta\varpi}{dt} &= -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\mathrm{G} \\
&\quad + \delta\left(-\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathcal{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\mathcal{G}\right. \\
&\qquad\quad \left. - \frac{\gamma}{2na^2e\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\mathrm{G}\right), \\
\frac{d\delta a}{dt} &= -\frac{2}{na}\,\mathrm{J} + \delta\left(-\frac{2}{na}\,\mathrm{J}\right), \\
\frac{d\delta\lambda}{dt} &= \frac{2}{na}\,\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E} \\
&\quad + \delta\left(\frac{2}{na}\,\mathcal{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathcal{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathcal{E}\right. \\
&\qquad\quad \left. + \frac{2}{na}\,\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Il faut, de ces équations, conclure $\delta\gamma,\ldots,\delta\lambda$ par approximations successives. La première approximation consiste à négliger dans les seconds membres les parties affectées de la caractéristique δ. Les équations exactes (A) se réduisent alors aux équations approchées qui

suivent :

$$
(\mathrm{B})\quad\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\delta\gamma}{dt} &= \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J}),\\
\frac{d\delta\vartheta}{dt} &= -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E},\\
\frac{d\delta e}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\mathrm{H} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathrm{J},\\
\frac{d\delta\varpi}{dt} &= -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\mathrm{G},\\
\frac{d\delta a}{dt} &= -\frac{2}{na}\,\mathrm{J},\\
\frac{d\delta\lambda}{dt} &= \frac{2}{na}\,\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E},
\end{aligned}
\right.
$$

où les seconds membres deviennent des fonctions explicites du temps, lorsqu'on y remplace γ, ϑ, ϖ, λ par les valeurs de la page 35 et $\gamma'\sin\vartheta'$, $\gamma'\cos\vartheta'$ par $\mathrm{A}t+\mathrm{A}_1t^2$, $\mathrm{B}t+\mathrm{B}_1t^2$. Pour faciliter les calculs, nous poserons

$$
\begin{aligned}
\Delta_1\gamma &= \mathcal{L}\,qt + \mathfrak{M}\,p,\\
\Delta_1\vartheta &= \mathcal{L}'\,pt + \mathfrak{M}'\,q,\\
\Delta_1\varpi &= \mathcal{L}''\,pt + \mathfrak{M}''\,q,\\
\Delta_1\lambda &= \mathcal{L}'''\,pt + \mathfrak{M}'''\,q,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_2\gamma &= \mathfrak{N}\,(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,t^2 + \mathcal{L}\,q_1t^2 + 2\,\mathfrak{M}\,p_1t + \mathfrak{Q}\,q_1 + \mathfrak{R}\,\mathrm{P}t^2 + \mathfrak{S}\,\mathrm{Q}t + \mathfrak{T}\,\mathrm{P},\\
\Delta_2\vartheta &= \mathfrak{N}'(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,t^3 + \mathcal{L}'p_1t^2 + 2\,\mathfrak{M}'q_1t + \mathfrak{Q}'p_1 + \mathfrak{R}'\mathrm{Q}t^2 + \mathfrak{S}'\,\mathrm{P}t + \mathfrak{T}'\mathrm{Q},\\
\Delta_2\varpi &= \mathfrak{N}''(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,t^3 + \mathcal{L}''p_1t^2 + 2\,\mathfrak{M}''q_1t + \mathfrak{Q}''p_1 + \mathfrak{R}''\mathrm{Q}t^2 + \mathfrak{S}''\mathrm{P}t + \mathfrak{T}''\mathrm{Q},\\
\Delta_2\lambda &= \mathfrak{N}'''(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,t^3 + \mathcal{L}'''p_1t^2 + 2\,\mathfrak{M}'''q_1t + \mathfrak{Q}'''p_1 + \mathfrak{R}'''\mathrm{Q}t^2 + \mathfrak{S}'''\mathrm{P}t + \mathfrak{T}'''\mathrm{Q},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\gamma &= \Delta_1\gamma + \Delta_2\gamma,\\
\Delta\vartheta &= \Delta_1\vartheta + \Delta_2\vartheta,\\
\Delta\varpi &= \Delta_1\varpi + \Delta_2\varpi,\\
\Delta\lambda &= \Delta_1\lambda + \Delta_2\lambda,
\end{aligned}
$$

en sorte qu'on ait

$$(C)\quad \gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma, \quad \theta = \theta^0 + \Delta\theta, \quad \varpi = \varpi^0 + \Delta\varpi, \quad \lambda = \lambda^0 + \Delta\lambda.$$

Observons que $\Delta_1\gamma$, $\Delta_1\theta$, $\Delta_1\varpi$, $\Delta_1\lambda$ sont des quantités du premier ordre, tandis que $\Delta_2\gamma$, $\Delta_2\theta$, $\Delta_2\varpi$, $\Delta_2\lambda$ sont du second.

Cela posé, revenons aux équations (B); lorsqu'on y aura remplacé les dérivées partielles de R_2 par leurs valeurs, le second membre de chacune d'elles deviendra une série de termes de la forme $M\,{\sin \atop \cos}\,\mathcal{A}$, M étant une fonction de γ et de γ' et $\mathcal{A}$ désignant un argument de la forme

$$\mathcal{A} = ml + m_1\varpi + m_2\theta + m'l' + m'_1\varpi' + m'_2\theta';$$

dans cette formule, on a

$$l = nt + \lambda,$$

et m, m_1, m_2, m', m'_1, m'_2 désignant des nombres entiers positifs ou négatifs. Concevons maintenant que dans chaque terme $M\,{\sin \atop \cos}\,\mathcal{A}$, on remplace les variables γ, θ, ϖ, λ par leurs valeurs (C), en développant le résultat suivant les puissances de $\Delta\gamma$, $\Delta\theta$, $\Delta\varpi$, $\Delta\lambda$ jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement. Après la substitution des valeurs de $\Delta\gamma$, $\Delta\theta$, $\Delta\varpi$, $\Delta\lambda$, on voit, en ayant égard à la signification des lettres p, q, p_1, q_1, P, Q, qu'on obtiendra des termes ayant pour arguments, soit l'angle

$$\mathcal{A} = ml^0 + m_1\varpi^0 + m_2\theta^0 + m'l' + m'_1\varpi' + m'_2\theta'$$

(on a $l^0 = nt + \lambda^0$), soit l'un des angles

$$\mathcal{A}^0 + \theta^0, \quad \mathcal{A}^0 - \theta_0, \quad \mathcal{A}^0 + 2\theta_0, \quad \mathcal{A}^0 - 2\theta_0.$$

Les coefficients de ces termes pourront d'ailleurs contenir en facteur t, ou t^2, ou t^3.

Les seconds membres des équations (B) étant maintenant composés de termes de ce genre, il suffira d'avoir égard aux relations

$$\gamma'\sin\theta' = At + A_1t^2, \quad \gamma'\cos\theta' = Bt + B_1t_2,$$

pour en faire des fonctions explicites du temps. On pourra alors les intégrer, et on obtiendra ainsi les portions de $\delta\gamma$, $\delta\theta$, δe, $\delta\varpi$, δa, $\delta\lambda$, qui répondent à la première approximation, portions que nous appellerons $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$ [*]. La valeur de $\delta_1 n$ se conclura d'ailleurs de celle de $\delta_1 a$ à l'aide de la relation

$$\delta_1 n = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\delta_1 a,$$

et $\delta_1 l$ sera donnée par la formule

$$\delta_1 l = \int \delta_1 n\, dt + \delta_1\lambda.$$

Examinons d'abord si cette première approximation peut introduire dans la longitude moyenne de la Lune des termes non périodiques proportionnels au carré du temps ou à une puissance plus élevée de cette variable. On voit aisément, d'après ce qui vient d'être dit, et en négligeant toujours les quantités d'ordre supérieur au second, que les seuls termes de R_2 qui puissent fournir des quantités de ce genre sont ceux qui ont pour arguments $2\varpi' - 2\theta'$, $2\varpi' - \theta - \theta'$, $2\varpi' - 2\theta$. Ces termes sont, en ne gardant dans leurs coefficients que les parties du degré le moins élevé,

$$-\frac{135}{64} n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 \gamma'^2 \cos(2\varpi' - 2\theta'),$$

$$+\frac{135}{32} n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 \gamma\gamma' \cos(2\varpi' - \theta - \theta'),$$

$$-\frac{135}{64} n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 \gamma^2 \cos(2\varpi' - 2\theta).$$

Substituons-les successivement à la place de R_2 dans l'expression de $\frac{d\delta\lambda}{dt}$; remplaçons, comme il a été dit, γ et θ par $\gamma + \Delta_1\gamma + \Delta_2\gamma$, $\theta + \Delta_1\theta + \Delta_2\theta$, et ne conservons dans les résultats que les parties non périodiques, en négligeant toutefois les parties constantes qui se con-

[*] La caractéristique δ_1 reçoit ici une signification différente de celle qui lui a été attribuée page 27.

foudraient avec le moyen mouvement. En posant, pour abréger,

$$\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos 2\varpi' + AB\sin 2\varpi' = A'_1,$$

$$\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin 2\varpi' - AB\cos 2\varpi' = B'_1,$$

en sorte que A'_1 et B'_1 soient des quantités du second ordre, nous trouverons, par le premier des termes ci-dessus,

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = -\frac{135}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^2;$$

par le second,

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = +\frac{405}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^2 + \frac{135}{2}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t;$$

par le troisième,

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = -\frac{135}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^2 - 45\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t.$$

Rassemblant ces trois résultats, on voit que les termes en t^2 se détruisent, et on trouve

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = +\frac{45}{2}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t, \quad \delta_1\lambda = +\frac{45}{4}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t^2.$$

D'ailleurs, les termes de R_2, que nous considérons, ne renfermant pas λ dans leurs arguments, les valeurs correspondantes de $\frac{dR_2}{d\lambda}$ sont nulles, par suite aussi celles de $\delta_1 a$ et de $\delta_1 n$. Donc, relativement à ces termes, $\delta_1 l$ se réduit à $\delta_1\lambda$, et on a

$$\delta_1 l = +\frac{45}{4}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t^2.$$

On voit que cette inégalité a pour effet d'ajouter au coefficient de l'accélération séculaire la partie $\frac{45}{4}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1$; mais, si l'on calcule ce

nombre en prenant toujours le siècle de 36525 jours pour unité de temps, on le trouve égal à $-0'',000000000017$ environ; l'inégalité qu'on vient de déterminer est donc tout à fait négligeable [*].

La première approximation nous ayant fait connaître les valeurs approchées $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$, $\delta_1 l$ des quantités $\delta\gamma$, $\delta\theta$, δe, $\delta\varpi$, δa, $\delta\lambda$, δl (on trouvera, page 59 et suivantes, les valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, etc., qui répondent à chaque terme de R_2 considéré séparément), proposons-nous maintenant d'obtenir pour δl la valeur plus approchée $\delta_1 l + \delta_2 l$ [**], qui doit résulter de la seconde approximation. En représentant de même par $\delta_1 n + \delta_2 n$ et $\delta_1\lambda + \delta_2\lambda$ les valeurs de δn et de $\delta\lambda$ résultant de cette seconde approximation, on aura

$$\delta_2 l = \int \delta_2 n\, dt + \delta_2\lambda,$$

et par conséquent

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = \delta_2 n + \frac{d\delta_2\lambda}{dt}.$$

Mais lorsque n et a désignaient les valeurs complètes des éléments auxquels ces lettres se rapportent, on avait

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt} = \frac{3J}{a^2};$$

ces mêmes éléments étant représentés par $a + \delta a$, $n + \delta n$, on aura, en observant que n désigne maintenant une constante,

$$\frac{d\delta n}{dt} = \frac{3J}{a^2} + \delta\left(\frac{3J}{a^2}\right).$$

[*] Les termes en t^2, qui se sont détruits quand on a réuni les trois parties de $\frac{d\delta_1\lambda}{dt}$, donneraient, chacun en particulier, dans $\delta_1\lambda$, et par suite dans $\delta_1 l$, un terme en t^3; le plus grand de ces termes serait $+\frac{135}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^3$, ou, numériquement, $-0'',0000000017\,t^3$. Une pareille inégalité est encore négligeable, et par conséquent on n'a pas à craindre qu'en poussant plus loin l'approximation dans les coefficients des trois termes de R^2 qu'on vient de considérer on obtienne dans $\delta_1 l$ des termes en t^3 ayant une influence sensible sur l'accélération séculaire.

[**] La caractéristique δ_2 n'a plus ici la même signification qu'à la page 27.

Or le $\delta_1 n$ correspondant à la première approximation est donné par l'équation

$$\frac{d\delta_1 n}{dt} = \frac{3\mathrm{J}}{a^2};$$

on a donc

$$\frac{d\delta_2 n}{dt} = \delta_1\left(\frac{3\mathrm{J}}{a^2}\right),$$

en désignant par $\delta_1\left(\frac{3\mathrm{J}}{a^2}\right)$ l'accroissement qu'éprouve la quantité $\frac{3\mathrm{J}}{a^2}$ lorsqu'on y remplace les éléments $\gamma, \theta, \ldots$ par $\gamma + \delta_1\gamma$, $\theta + \delta_1\theta, \ldots$ et qu'on néglige les termes de deux dimensions ou plus en $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta, \ldots$.

De même, si nous posons, pour abréger,

$$\mathrm{S} = \frac{2}{na}(\mathfrak{I} + \mathrm{I}) - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{na^2 e}(\mathcal{G} + \mathrm{G}) - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathcal{E} + \mathrm{E}),$$

nous aurons, d'après la dernière équation (A),

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = \frac{2}{na}\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{na^2 e}\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E} + \delta\mathrm{S},$$

et comme on a

$$\frac{dd_1\lambda}{dt} = \frac{2}{na}\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{na^2 e}\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E},$$

il en résultera

$$\frac{d\delta_2\lambda}{dt} = \delta_1\mathrm{S}.$$

Ces deux formules $\frac{d\delta_2 n}{dt} = \delta_1\left(\frac{3\mathrm{J}}{a^2}\right)$, $\frac{d\delta_2\lambda}{dt} = \delta_1\mathrm{S}$ nous serviront à calculer les parties non périodiques de $\delta_2 n$ et de $\delta_2\lambda$, et, par suite, celles de $\delta_2 l = \int \delta_2 n\,dt + \delta_2\lambda$.

Pour effectuer commodément ces calculs, il conviendra de former d'abord les expressions générales des valeurs de $\delta_1\lambda$, $\delta_1\theta, \ldots$ correspondantes à un terme quelconque de R_2 considéré isolément. On peut chercher, en effet, $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta, \ldots$, en réduisant la fonction R_2 succes-

sivement à chacun de ses termes, et rassemblant les résultats ainsi obtenus.

Soit donc $C\cos\mathcal{A}$ un terme quelconque de cette fonction, où l'on a

$$\mathcal{A} = ml + m_1\varpi + m_2\theta + m'l' + m'_1\varpi' + m'_2\theta',$$

et où C est une fonction de a, e, γ, γ' (nous ne mentionnons pas a' et e', qui sont traitées, ainsi que ϖ', comme des constantes absolues). En réduisant R_2 à $C\cos\mathcal{A}$, on a

$$E = \frac{dC}{d\gamma}\cos\mathcal{A},\qquad G = \frac{dC}{de}\cos\mathcal{A},\qquad I = \frac{dC}{da}\cos\mathcal{A},$$
$$F = -m_2 C\sin\mathcal{A},\qquad H = -m_1 C\sin\mathcal{A},\qquad J = -mC\sin\mathcal{A}.$$

Si donc on pose [*]

$$X = \left[-\frac{m^2}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}} - \frac{(m+m_1)\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\right]C,$$
$$Y = \left[-\frac{m_1\sqrt{1-e^2}}{na^2e} - \frac{m(\sqrt{1-e^2}-1+e^2)}{na^2e}\right]C,$$
$$Z = \frac{2m}{na}C;$$
$$U = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dC}{d\gamma},$$
$$V = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dC}{de} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dC}{d\gamma},$$
$$W = \frac{2}{na}\frac{dC}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dC}{de} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dC}{d\gamma},$$

on aura, d'après les équations (B),

$$\frac{d\delta_1\gamma}{dt} = X\sin\mathcal{A},\quad \frac{d\delta_1 e}{dt} = Y\sin\mathcal{A},\quad \frac{d\delta_1 a}{dt} = Z\sin\mathcal{A},$$
$$\frac{d\delta_1\theta}{dt} = U\cos\mathcal{A},\quad \frac{d\delta_1\varpi}{dt} = V\cos\mathcal{A},\quad \frac{d\delta_1\lambda}{dt} = W\sin\mathcal{A}.$$

---

[*] Les lettres X, Y, U, V reçoivent maintenant une signification différente de celle qui leur a été attribuée page 23.

Dans les seconds membres de ces équations, a, e, n sont des constantes, et γ, θ, ϖ, λ ont les valeurs données par les formules (C); on peut donc y remplacer γ par $\gamma_0 + \Delta\gamma$, et $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}^0 + \Delta\mathcal{L}$, en faisant

$$\Delta\mathcal{L} = m\Delta\lambda + m_1\Delta\varpi + m_2\Delta\vartheta,$$

ou bien encore γ par $\gamma_0 + \Delta_1\gamma + \Delta_2\gamma$ et $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}^0 + \Delta_1\mathcal{L} + \Delta_2\mathcal{L}$, en faisant

$$\Delta_1\mathcal{L} = m\Delta_1\lambda + m_1\Delta_1\varpi + m_2\Delta_1\vartheta, \quad \Delta_2\mathcal{L} = m\Delta_2\lambda + m_1\Delta_2\varpi + m_2\Delta_2\vartheta.$$

Si l'on fait cette substitution, qu'on développe les résultats suivant les puissances de $\Delta_1\gamma$, $\Delta_2\gamma$, $\Delta_1\mathcal{L}$, $\Delta_2\mathcal{L}$, en se bornant aux quantités du second ordre, qu'on mette pour $\Delta_1\gamma$, $\Delta_2\gamma$, $\Delta_1\mathcal{L}$, $\Delta_2\mathcal{L}$ leurs valeurs, et qu'enfin on remplace $\gamma'\sin\vartheta'$ par $At + A_1t^2$, $\gamma'\cos\vartheta'$ par $Bt + B_1t^2$, on obtiendra des sommes de termes où le temps entrera soit dans l'angle

$$\mathcal{L}^0 - m_2\vartheta' = [m(n + k^0) + m_1 j^0 + m_2 h^0]t + \text{const.},$$

soit dans les quantités p, q. p_1, q_1, P, Q par l'angle

$$\vartheta_0 = h_0 t + c_1,$$

soit enfin explicitement en facteur. Ces expressions s'intégreront aisément, et on aura ainsi les valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\vartheta$, $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$; de la valeur de $\delta_1 a$ on conclura celle $\delta_1 n$ en la multipliant par $-\frac{3n}{2a}$, et on pourra calculer par suite $\int \delta_1 n dt$. Mais, avant d'écrire les formules auxquelles on parvient ainsi, il est à propos de distinguer plusieurs cas.

Soit d'abord $m'_2 = 0$. Le coefficient C sera une fonction paire de γ', et nous l'écrirons $C + \overline{C}\gamma'^2$, employant ici la lettre C non surmontée d'une barre pour désigner seulement la partie indépendante de γ'; nous représenterons de même par $X + \overline{X}\gamma'^2$, $Y + \overline{Y}\gamma'^2$, $Z + \overline{Z}\gamma'^2$, $U + \overline{U}\gamma'^2$, $V + \overline{V}\gamma'^2$, $W + \overline{W}\gamma'^2$ les quantités qui ont été appelées tout à l'heure X, Y, Z, U, V, W.

Soit ensuite $m'_2 = \pm 1$. Le coefficient C contiendra alors γ' en facteur, et nous l'écrirons $C\gamma'$; les quantités appelées d'abord X, Y, Z, U, V, W seront représentées ici par $X\gamma'$, $Y\gamma'$, $Z\gamma'$, $U\gamma'$, $V\gamma'$, $W\gamma'$. Nous ferons de plus

$$\mathcal{B} = ml + m_1\varpi + m_2\theta + m'l' + m'_1\varpi',$$

en sorte qu'on ait

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \pm \theta',$$

et nous poserons

$$\mathcal{B}^0 = ml^0 + m_1\varpi^0 + m_2\theta^0 + m'l' + m'_1\varpi'.$$

Soit enfin $m'_2 = \pm 2$. Le coefficient C contenant alors γ'^2 en facteur, nous l'écrirons $C\gamma'^2$, et au lieu de X, Y, Z, U, V, W, nous écrirons également $X\gamma'^2$, $Y\gamma'^2$, $Z\gamma'^2$, $U\gamma'^2$, $V\gamma'^2$, $W\gamma'^2$. Nous poserons de plus, pour ce cas,

$$\mathfrak{b} = ml + m_1\varpi + m_2\theta + m'l' + m'_1\varpi',$$

en sorte qu'on ait

$$\mathcal{A} = \mathfrak{b} \pm 2\theta',$$

et nous ferons

$$\mathfrak{b}^0 = ml^0 + m_1\varpi^0 + m_2\theta^0 + m'l' + m'_1\varpi'.$$

Nous poserons d'ailleurs dans ces différents cas

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{IV} &= m\mathcal{L}''' + m_1\mathcal{L}'' + m_2\mathcal{L}',\\
\mathcal{M}^{IV} &= m\mathcal{M}''' + m_1\mathcal{M}'' + m_2\mathcal{M}',\\
\mathcal{N}^{IV} &= m\mathcal{N}''' + m_1\mathcal{N}'' + m_2\mathcal{N}',\\
\mathcal{Q}^{IV} &= m\mathcal{Q}''' + m_1\mathcal{Q}'' + m_2\mathcal{Q}',\\
\mathcal{R}^{IV} &= m\mathcal{R}''' + m_1\mathcal{R}'' + m_2\mathcal{R}',\\
\mathcal{S}^{IV} &= m\mathcal{S}''' + m_1\mathcal{S}'' + m_2\mathcal{S}',\\
\mathcal{T}^{IV} &= m\mathcal{T}''' + m_1\mathcal{T}'' + m_2\mathcal{T}',
\end{aligned}$$

$$\mu = m(n + k^0) + m_1 j^0 + m_2 h^0 + m'n'.$$

Enfin l'indice zéro, placé au-dessous d'une fonction de γ, indiquera, comme précédemment, qu'on y a remplacé γ par γ_0.

Cela posé, on aura les formules suivantes :

Cas de $m'_2 = 0$.

Terme considéré de R_2 : $(C + \bar{C}\gamma'^2)\cos_2 t$.

Déterminons les vingt quantités $K_1, K_2, \ldots K_{20}$ à l'aide des équations

$$K_4 = \frac{1}{\mu} X_0\, \mathcal{T}^{IV},$$

$$K_3 = -\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{L}^2 + \left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{T} - \tfrac{1}{4} X_0\, \mathcal{L}^{IV2} + \bar{X}_0\right] + \frac{3}{\mu} K_4,$$

$$K_2 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{L}\mathfrak{M}^{IV} + \mathfrak{M}\mathcal{L}^{IV}) - \frac{2}{\mu} K_3,$$

$$K_1 = -\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 - \tfrac{1}{4} X_0\, \mathfrak{M}^{IV2}\right] + \frac{1}{\mu} K_2,$$

$$K_7 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + X_0\, \mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$K_8 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[-\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + X_0\, \mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$K_5 = -\frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + X_0\, \mathfrak{M}^{IV}\right] + \frac{1}{\mu + h_0} K_8,$$

$$K_6 = -\frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} - X_0\, \mathfrak{M}^{IV}\right] + \frac{1}{\mu - h_0} K_7,$$

$$K_{11} = 2K_6, \quad K_{12} = 2K_5, \quad K_{13} = K_7, \quad K_{14} = K_8,$$

$$K_9 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{Q} + X_0\, \mathcal{Q}^{IV}\right] - \frac{1}{\mu - h_0} K_{11},$$

$$K_{10} = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[-\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{Q} + X_0\, \mathcal{Q}^{IV}\right] - \frac{1}{\mu + h_0} K_{12},$$

$$K_{19} = -\frac{1}{\mu + 2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{R} - \mathcal{L}\mathcal{L}^{IV}) + \tfrac{1}{4} X_0 (\mathcal{L}^{IV2} + 2\mathcal{R}^{IV})\right],$$

$$K_{20} = -\frac{1}{\mu - 2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{R} + \mathcal{L}\mathcal{L}^{IV}) + \tfrac{1}{4} X_0 (\mathcal{L}^{IV2} - 2\mathcal{R}^{IV})\right],$$

$$K_{17} = \frac{1}{\mu + 2h_0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2X}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dq}\right)_0 (\mathfrak{L}\mathfrak{M}^{IV} - \mathfrak{M}\mathfrak{L}^{IV} - \mathfrak{S}) + \frac{1}{2}X_0(\mathfrak{S}^{IV} - \mathfrak{L}^{IV}\mathfrak{M}^{IV})\right] - \frac{2}{\mu + 2h_0}K_{19},$$

$$K_{18} = \frac{1}{\mu - 2h_0}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2X}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dq}\right)_0 (\mathfrak{L}\mathfrak{M}^{IV} - \mathfrak{M}\mathfrak{L}^{IV} + \mathfrak{S}) + \frac{1}{2}X_0(\mathfrak{S}^{IV} + \mathfrak{L}^{IV}\mathfrak{M}^{IV})\right] - \frac{2}{\mu - 2h_0}K_{20},$$

$$K_{15} = -\frac{1}{\mu + 2h_0}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dq}\right)_0 (\mathfrak{T} - \mathfrak{M}\mathfrak{M}^{IV}) + \frac{1}{4}X_0(2\mathfrak{T}^{IV} - \mathfrak{M}^{IV2})\right] - \frac{1}{\mu + 2h_0}K_{17},$$

$$K_{16} = -\frac{1}{\mu - 2h_0}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dq}\right)_0 (\mathfrak{T} + \mathfrak{M}\mathfrak{M}^{IV}) - \frac{1}{4}X_0(2\mathfrak{T}^{IV} + \mathfrak{M}^{IV2})\right] + \frac{1}{\mu - 2h_0}K_{18}.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Y et M; elles détermineront vingt nouvelles quantités M_1, $M_2, \ldots, M_{20}$. Dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Z et P; elles détermineront vingt nouvelles quantités $P_1, P_2, \ldots, P_{20}$.

Déterminons ensuite les vingt quantités $L_1, L_2, \ldots, L_{20}$ à l'aide des équations

$$L_4 = \frac{1}{\mu} U_0 \mathfrak{T}^{IV},$$

$$L_3 = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{L}^2 + \left(\frac{dU}{dq}\right)_0 \mathfrak{T} - \frac{1}{4}U_0\mathfrak{L}^{IV2} + \overline{U}_0\right] - \frac{3}{\mu}L_4,$$

$$L_2 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 (\mathfrak{L}\mathfrak{M}^{IV} + \mathfrak{M}\mathfrak{L}^{IV}) + \frac{2}{\mu}L_3,$$

$$L_1 = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 - \frac{1}{4}U_0\mathfrak{M}^{IV2}\right] - \frac{1}{\mu}L_2.$$

$$L_7 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 \mathfrak{L} + U_0\mathfrak{L}^{IV}\right],$$

$$L_8 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[-\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 \mathfrak{L} + U_0\mathfrak{L}^{IV}\right],$$

$$L_5 = \frac{1}{2(\mu+h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 \mathfrak{M} + U_0\,\mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] - \frac{1}{\mu+h_0} L_8,$$

$$L_6 = \frac{1}{2(\mu-h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 \mathfrak{M} - U_0\,\mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] - \frac{1}{\mu-h_0} L_7,$$

$$L_{11} = 2L_6,\quad L_{12} = 2L_5,\quad L_{13} = L_7,\quad L_{14} = L_8,$$

$$L_9 = \frac{1}{2(\mu-h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 \mathfrak{Q} + U_0\,\mathfrak{Q}^{\text{IV}}\right] + \frac{1}{\mu-h_0} L_{11},$$

$$L_{10} = \frac{1}{2(\mu+h_0)}\left[-\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 \mathfrak{Q} + U_0\,\mathfrak{Q}^{\text{IV}}\right] + \frac{1}{\mu+h_0} L_{12},$$

$$L_{19} = \frac{1}{\mu+2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 (\mathfrak{R} - \mathfrak{L}\mathfrak{L}^{\text{IV}}) + \tfrac{1}{4} U_0 (\mathfrak{L}^{\text{IV}2} + 2\mathfrak{R}^{\text{IV}})\right],$$

$$L_{20} = \frac{1}{\mu-2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 (\mathfrak{R} + \mathfrak{L}\mathfrak{L}^{\text{IV}}) + \tfrac{1}{4} U_0 (\mathfrak{L}^{\text{IV}2} - 2\mathfrak{R}^{\text{IV}})\right],$$

$$\begin{aligned} L_{17} = \frac{1}{\mu+2h_0}\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{L}\mathfrak{M} &+ \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 (\mathfrak{L}\mathfrak{M}^{\text{IV}} - \mathfrak{M}\mathfrak{L}^{\text{IV}} - \mathfrak{S}) \\ &+ \tfrac{1}{2} U_0 (\mathfrak{S}^{\text{IV}} - \mathfrak{L}^{\text{IV}}\mathfrak{M}^{\text{IV}})\Bigg] + \frac{2}{\mu+2h_0} L_{19}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{18} = \frac{1}{\mu-2h_0}\Bigg[-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{L}\mathfrak{M} &+ \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 (\mathfrak{L}\mathfrak{M}^{\text{IV}} - \mathfrak{M}\mathfrak{L}^{\text{IV}} + \mathfrak{S}) \\ &+ \tfrac{1}{2} U_0 (\mathfrak{S}^{\text{IV}} + \mathfrak{L}^{\text{IV}}\mathfrak{M}^{\text{IV}})\Bigg] + \frac{2}{\mu-2h_0} L_{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{15} = \frac{1}{\mu+2h_0}\Bigg[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 &+ \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 (\mathfrak{T} - \mathfrak{M}\mathfrak{M}^{\text{IV}}) \\ &+ \tfrac{1}{4} U_0 (2\mathfrak{T}^{\text{IV}} - \mathfrak{M}^{\text{IV}2})\Bigg] - \frac{1}{\mu+2h_0} L_{17}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{16} = \frac{1}{\mu-2h_0}\Bigg[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 &+ \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dq}\right)_0 (\mathfrak{T} + \mathfrak{M}\mathfrak{M}^{\text{IV}}) \\ &- \tfrac{1}{4} U_0 (2\mathfrak{T}^{\text{IV}} + \mathfrak{M}^{\text{IV}2})\Bigg] - \frac{1}{\mu-2h_0} L_{18}. \end{aligned}$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres V et N; elles détermineront vingt nouvelles quantités N_1, $N_2, \ldots, N_{20}$. Dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres W et Q; elles détermineront encore vingt nouvelles quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{20}$.

Déterminons enfin les vingt quantités Π_1, $\Pi_2, \ldots, \Pi_{20}$ à l'aide des équations

$$\Pi_1 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_1}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{P_2}{a} + 3\frac{n}{\mu^3}\frac{P_3}{a} + 9\frac{n}{\mu^4}\frac{P_4}{a},$$

$$\Pi_2 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_2}{a} - 3\frac{n}{\mu^2}\frac{P_3}{a} - 9\frac{n}{\mu^3}\frac{P_4}{a},$$

$$\Pi_3 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_3}{a} - \frac{9}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{P_4}{a},$$

$$\Pi_4 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_4}{a},$$

$$\Pi_7 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu - h_0}\frac{P_7}{a},$$

$$\Pi_8 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu + h_0}\frac{P_8}{a},$$

$$\Pi_5 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu + h_0}\frac{P_5}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu + h_0)^2}\frac{P_8}{a},$$

$$\Pi_6 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu - h_0}\frac{P_6}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu - h_0)^2}\frac{P_7}{a},$$

$$\Pi_{11} = 2\Pi_6, \quad \Pi_{12} = 2\Pi_5, \quad \Pi_{13} = \Pi_7, \quad \Pi_{14} = \Pi_8,$$

$$\Pi_9 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu - h_0}\frac{P_9}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu - h_0)^2}\frac{P_{11}}{a} - 3\frac{n}{(\mu - h_0)^3}\frac{P_{13}}{a},$$

$$\Pi_{10} = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu + h_0}\frac{P_{10}}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu + h_0)^2}\frac{P_{12}}{a} - 3\frac{n}{(\mu + h_0)^3}\frac{P_{14}}{a},$$

$$\Pi_{15} = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu + 2h_0}\frac{P_{15}}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu + 2h_0)^2}\frac{P_{17}}{a} + 3\frac{n}{(\mu + 2h_0)^3}\frac{P_{19}}{a},$$

$$\Pi_{16} = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu - 2h_0}\frac{P_{16}}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu - 2h_0)^2}\frac{P_{18}}{a} + 3\frac{n}{(\mu - 2h_0)^3}\frac{P_{20}}{a},$$

$$\Pi_{17} = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu + 2h_0}\frac{P_{17}}{a} - 3\frac{n}{(\mu + 2h_0)^2}\frac{P_{19}}{a},$$

$$\Pi_{18} = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu - 2h_0}\frac{P_{18}}{a} - 3\frac{n}{(\mu - 2h_0)^2}\frac{P_{20}}{a},$$

$$\Pi_{19} = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu + 2h_0}\frac{P_{19}}{a},$$

$$\Pi_{20} = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu - 2h_0}\frac{P_{20}}{a}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
\delta_1 \gamma = & \left[-\frac{1}{\mu} X_0 + K_1(A^2 + B^2)\right] \cos \mathcal{L}^0 + K_2(A^2 + B^2) t \sin \mathcal{L}^0 \\
& + K_3(A^2 + B^2) t^2 \cos \mathcal{L}^0 + K_4(A^2 + B^2) t^3 \sin \mathcal{L}^0 \\
& + K_5 [A \cos(\mathcal{L}^0 + \theta_0) - B \sin(\mathcal{L}^0 + \theta_0)] \\
& + K_6 [A \cos(\mathcal{L}^0 - \theta_0) + B \sin(\mathcal{L}^0 - \theta_0)] \\
& + K_7 [A \sin(\mathcal{L}^0 - \theta_0) - B \cos(\mathcal{L}^0 - \theta_0)] t \\
& + K_8 [A \sin(\mathcal{L}^0 + \theta_0) + B \cos(\mathcal{L}^0 + \theta_0)] t \\
& + K_9 [A \sin(\mathcal{L}^0 - \theta_0) - B_1 \cos(\mathcal{L}^0 - \theta_0)] \\
& + K_{10} [A_1 \sin(\mathcal{L}^0 + \theta_0) + B_1 \cos(\mathcal{L}^0 + \theta_0)] \\
& + K_{11} [A_1 \cos(\mathcal{L}^0 - \theta_0) + B_1 \sin(\mathcal{L}^0 - \theta_0)] t \\
& + K_{12} [A_1 \cos(\mathcal{L}^0 + \theta_0) - B_1 \sin(\mathcal{L}^0 + \theta_0)] t \\
& + K_{13} [A_1 \sin(\mathcal{L}^0 - \theta_0) - B_1 \cos(\mathcal{L}^0 - \theta_0)] t^2 \\
& + K_{14} [A_1 \sin(\mathcal{L}^0 + \theta_0) + B_1 \cos(\mathcal{L}^0 + \theta_0)] t^2 \\
& + K_{15} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\mathcal{L}^0 + 2\theta_0) + AB \sin(\mathcal{L}^0 + 2\theta_0)] \\
& + K_{16} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\mathcal{L}^0 - 2\theta_0) - AB \sin(\mathcal{L}^0 - 2\theta_0)] \\
& + K_{17} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\mathcal{L}^0 + 2\theta_0) - AB \cos(\mathcal{L}^0 + 2\theta_0)] t \\
& + K_{18} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\mathcal{L}^0 - 2\theta_0) + AB \cos(\mathcal{L}^0 - 2\theta_0)] t \\
& + K_{19} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\mathcal{L}^0 + 2\theta_0) + AB \sin(\mathcal{L}^0 + 2\theta_0)] t^2 \\
& + K_{20} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\mathcal{L}^0 - 2\theta_0) - AB \sin(\mathcal{L}_0 - 2\theta_0)] t^2;
\end{aligned}$$

si dans le second membre de cette formule on remplace les lettres X et K par Y et M, on obtiendra la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace les lettres X et K par Z et P, on obtiendra la valeur de $\delta_1 a$. On aura en-

suite

$$
\begin{aligned}
\partial_1 \vartheta = \Big[\frac{1}{\mu} U_0 + L_1(A^2 + B^2)\Big] & \sin \mathcal{L}^0 + L_2(A^2 + B^2)\, t \cos \mathcal{L}^0 \\
& + L_3(\mathcal{L}^2 + B^2)\, t^2 \sin \mathcal{L}^0 + L_4(A^2 + B^2)\, t^2 \cos \mathcal{L}^0 \\
& + L_5 [A \sin(\mathcal{L}^0 + \vartheta_0) + B \cos(\mathcal{L}^0 + \vartheta_0)] \\
& + L_6 [A \sin(\mathcal{L}^0 - \vartheta_0) - B \cos(\mathcal{L}^0 - \vartheta_0)] \\
& + L_7 [A \cos(\mathcal{L}^0 - \vartheta_0) + B \sin(\mathcal{L}^0 - \vartheta_0)]\, t \\
& + L_8 [A \cos(\mathcal{L}^0 + \vartheta_0) - B \sin(\mathcal{L}^0 + \vartheta_0)] \\
& + L_9 [A_1 \cos(\mathcal{L}^0 - \vartheta_0) + B_1 \sin(\mathcal{L}^0 - \vartheta_0)] \\
& + L_{10} [A_1 \cos(\mathcal{L}^0 + \vartheta_0) - B_1 \sin(\mathcal{L}^0 + \vartheta_0)] \\
& + L_{11} [A_1 \sin(\mathcal{L}^0 - \vartheta_0) - B_1 \cos(\mathcal{L}^0 - \vartheta_0)]\, t \\
& + L_{12} [A_1 \sin(\mathcal{L}^0 + \vartheta_0) + B_1 \cos(\mathcal{L}^0 + \vartheta_0)]\, t \\
& + L_{13} [A_1 \cos(\mathcal{L}^0 - \vartheta_0) + B_1 \sin(\mathcal{L}^0 - \vartheta_0)]\, t^2 \\
& + L_{14} [A_1 \cos(\mathcal{L}^0 + \vartheta_0) - B_1 \sin(\mathcal{L}^0 + \vartheta_0)]\, t^2 \\
& + L_{15} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\mathcal{L}^0 + 2\vartheta_0) - AB \cos(\mathcal{L}^0 + 2\vartheta_0)] \\
& + L_{16} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\mathcal{L}^0 - 2\vartheta_0) + AB \cos(\mathcal{L}^0 - 2\vartheta_0)] \\
& + L_{17} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\mathcal{L}^0 + 2\vartheta_0) + AB \sin(\mathcal{L}^0 + 2\vartheta_0)]\, t \\
& + L_{18} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\mathcal{L}^0 - 2\vartheta_0) - AB \sin(\mathcal{L}^0 - 2\vartheta_0)]\, t \\
& + L_{19} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\mathcal{L}^0 + 2\vartheta_0) - AB \cos(\mathcal{L}^0 + 2\vartheta_0)]\, t^2 \\
& + L_{20} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\mathcal{L}^0 - 2\vartheta_0) + AB \cos(\mathcal{L}^0 - 2\vartheta_0)]\, t^2 ;
\end{aligned}
$$

si dans le second membre de cette formule on remplace les lettres U et L par V et N, on obtiendra la valeur de $\partial_1 \varpi$; si l'on y remplace les lettres U et L par W et Q, on obtiendra la valeur de $\partial_1 \lambda$. On aura

enfin

$$\int \delta_1 n\, dt = \left[\frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a} + \Pi_1(A^2+B^2)\right]\sin\mathcal{L}^0 + \Pi_2(A^2+B^2)\,t\cos\mathcal{L}^0$$

$$+ \Pi_3(A^2+B^2)\,t^2\sin\mathcal{L}^0 + \Pi_4(A^2+B^2)\,t^3\cos\mathcal{L}^0$$

$$+ \Pi_5\left[A\sin(\mathcal{L}^0+\vartheta_0) + B\cos(\mathcal{L}^0+\vartheta_0)\right]$$

$$+ \Pi_6\left[A\sin(\mathcal{L}^0-\vartheta_0) - B\cos(\mathcal{L}^0-\vartheta_0)\right]$$

$$+ \Pi_7\left[A\cos(\mathcal{L}^0-\vartheta_0) + B\sin(\mathcal{L}^0-\vartheta_0)\right]t$$

$$+ \Pi_8\left[A\cos(\mathcal{L}^0+\vartheta_0) - B\sin(\mathcal{L}^0+\vartheta_0)\right]t$$

$$+ \Pi_9\left[A_1\cos(\mathcal{L}^0-\vartheta_0) + B_1\sin(\mathcal{L}^0-\vartheta_0)\right]$$

$$+ \Pi_{10}\left[A_1\cos(\mathcal{L}^0+\vartheta_0) - B_1\sin(\mathcal{L}^0+\vartheta_0)\right]$$

$$+ \Pi_{11}\left[A_1\sin(\mathcal{L}^0-\vartheta_0) - B_1\cos(\mathcal{L}^0-\vartheta_0)\right]t$$

$$+ \Pi_{12}\left[A_1\sin(\mathcal{L}^0+\vartheta_0) + B_1\cos(\mathcal{L}^0+\vartheta_0)\right]t$$

$$+ \Pi_{13}\left[A_1\cos(\mathcal{L}^0-\vartheta_0) + B_1\sin(\mathcal{L}^0-\vartheta_0)\right]t^2$$

$$+ \Pi_{14}\left[A_1\cos(\mathcal{L}^0+\vartheta_0) - B_1\sin(\mathcal{L}^0+\vartheta_0)\right]t^2$$

$$+ \Pi_{15}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{L}^0+2\vartheta_0) - AB\cos(\mathcal{L}^0+2\vartheta_0)\right]$$

$$+ \Pi_{16}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{L}^0-2\vartheta_0) + AB\cos(\mathcal{L}^0-2\vartheta_0)\right]$$

$$+ \Pi_{17}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{L}^0+2\vartheta_0) + AB\sin(\mathcal{L}^0+2\vartheta_0)\right]t$$

$$+ \Pi_{18}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{L}^0-2\vartheta_0) - AB\sin(\mathcal{L}^0-2\vartheta_0)\right]t$$

$$+ \Pi_{19}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{L}^0+2\vartheta_0) - AB\cos(\mathcal{L}^0+2\vartheta_0)\right]t^2$$

$$+ \Pi_{20}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{L}^0-2\vartheta_0) + AB\cos(\mathcal{L}^0-2\vartheta_0)\right]t^2.$$

Observons que dans ces valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\vartheta$, $\int\delta_1 n\,dt$ et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$ qui s'en déduisent, les termes d'arguments $\mathcal{L}^0 \pm \vartheta_0$ ont des coefficients du premier ordre au moins, et que les termes d'arguments $\mathcal{L}^0 \pm 2\vartheta_0$ ont des coefficients du second ordre.

Cas de $m'_2 = +1$.

Terme considéré de R^2 : $C\gamma' \cos \mathcal{A} = C\gamma' \cos(\mathcal{B} + \theta')$.

Déterminons les six quantités $K_1, K_2, \ldots, K_6$ à l'aide des équations

$$K_3 = -\frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} - X_0 \mathcal{L}^{\text{IV}}\right],$$

$$K_2 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + X_0 \mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] - \frac{2}{\mu + h_0} K_3, \qquad K_1 = \frac{1}{\mu + h_0} K_2,$$

$$K_6 = -\frac{1}{\mu - h_0}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + X_0 \mathcal{L}^{\text{IV}}\right],$$

$$K_5 = \frac{1}{\mu - h_0}\left[-\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + X_0 \mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] - \frac{1}{\mu - h_0} K_6, \qquad K_4 = \frac{1}{\mu - h_0} K_5.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Y et M; elles détermineront six nouvelles quantités $M_1, M_2, \ldots, M_6$. Dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Z et P; elles détermineront encore six nouvelles quantités $P_1, P_2, \ldots, P_6$.

Déterminons ensuite les six quantités $L_1, L_2, \ldots, L_6$ à l'aide des équations

$$L_3 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} - U_0 \mathcal{L}^{\text{IV}}\right],$$

$$L_2 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + U_0 \mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] + \frac{2}{\mu + h_0} L_3, \qquad L_1 = -\frac{1}{\mu + h_0} L_2,$$

$$L_6 = \frac{1}{\mu - h_0}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + U_0 \mathcal{L}^{\text{IV}}\right],$$

$$L_5 = \frac{1}{\mu - h_0}\left[-\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + U_0 \mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] + \frac{2}{\mu - h_0} L_6, \qquad L_4 = -\frac{1}{\mu - h_0} L_5.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres V et N; elles détermineront six nouvelles quantités $N_1, N_2, \ldots,$

N_6. Dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres W et Q; elles détermineront encore six nouvelles quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$.

Déterminons enfin les six quantités $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_6$ à l'aide des équations

$$\Pi_1 = -3\frac{n}{(\mu+h_0)^2}\frac{P_2}{a} + 3\frac{n}{(\mu+h_0)^3}\frac{P_3}{a}, \quad \Pi_2 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu+h_0}\frac{P_2}{a} - 3\frac{n}{(\mu+h_0)^2}\frac{P_3}{a},$$

$$\Pi_3 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu+h_0}\frac{P_3}{a},$$

$$\Pi_4 = -3\frac{n}{(\mu-h_0)^2}\frac{P_5}{a} + 3\frac{n}{(\mu-h_0)^3}\frac{P_6}{a}, \quad \Pi_5 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu-h_0}\frac{P_5}{a} - 3\frac{n}{(\mu-h_0)^2}\frac{P_6}{a},$$

$$\Pi_6 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu-h_0}\frac{P_6}{a}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
\delta_1\gamma = {} & \frac{1}{\mu^4}X_0(A\cos\varpi^0 + B\sin\varpi_0) \\
& + \frac{1}{\mu}X_0(A\sin\varpi^0 - B\cos\varpi^0)\,t - \frac{2}{\mu^3}X_0(A_1\sin\varpi^0 - B_1\cos\varpi^0) \\
& + \frac{2}{\mu^2}X_0(A_1\cos\varpi^0 + B_1\sin\varpi^0)\,t + \frac{1}{\mu}X_0(A_1\sin\varpi^0 - B_1\cos\varpi^0)\,t^2 \\
& + K_1(A^2+B^2)\cos(\varpi^0+\theta_0) + K_2(A^2+B^2)\,t\sin(\varpi^0+\theta_0) \\
& + K_3(A^2+B^2)\,t^2\cos(\varpi^0+\theta_0) \\
& + K_4\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\varpi^0-\theta_0) - AB\sin(\varpi^0-\theta_0)\right] \\
& + K_5\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\varpi^0-\theta_0) + AB\cos(\varpi^0-\theta_0)\right]t \\
& + K_6\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\varpi^0-\theta_0) - AB\sin(\varpi^0-\theta_0)\right]t^2.
\end{aligned}$$

Si dans le second membre de cette formule on remplace les lettres X et K par Y et M, on obtiendra la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace les lettres X et K par Z et P, on obtiendra la valeur de $\delta_1 a$. On aura

ensuite

$$\begin{aligned}
\delta_1 \theta = & -\frac{1}{\mu^2} U_0 (A \sin \vartheta^0 - B \cos \vartheta^0) \\
& + \frac{1}{\mu} U_0 (A \cos \vartheta^0 - B \sin \vartheta^0) t - \frac{2}{\mu^3} U_0 (A_1 \cos \vartheta^0 + B_1 \sin \vartheta^0) \\
& - \frac{2}{\mu^2} U_0 (A_1 \sin \vartheta^0 - B_1 \cos \vartheta^0) t + \frac{1}{\mu} U_0 (A_1 \cos \vartheta^0 + B_1 \sin \vartheta^0) t^2 \\
& + L_1 (A^2 + B^2) \sin(\vartheta^0 + \theta_0) + L_2 (A^2 + B^2) t \cos(\vartheta^0 + \theta_0) \\
& + L_3 (A^2 + B^2) t^2 \sin(\vartheta^0 + \theta_0) \\
& + L_4 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\vartheta^0 - \theta_0) + AB \cos(\vartheta^0 - \theta_0)] \\
& + L_5 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\vartheta^0 - \theta_0) - AB \sin(\vartheta^0 - \theta_0)] t \\
& + L_6 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\vartheta^0 - \theta_0) + AB \cos(\vartheta^0 - \theta_0)] t^2.
\end{aligned}$$

Si dans le second membre de cette formule on remplace les lettres U et L par V et N, on obtiendra la valeur de $\delta_1 \varpi$; si l'on y remplace les lettres U et L par W et Q, on obtiendra la valeur de $\delta_1 \lambda$. On aura enfin

$$\begin{aligned}
\int \delta_1 n\, dt = & -3 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{n} (A \sin \vartheta^0 - B \cos \vartheta^0) \\
& + \frac{3}{2} \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} (A \cos \vartheta^0 + B \sin \vartheta^0) t \\
& - 9 \frac{n}{\mu^4} \frac{Z_0}{a} (A_1 \cos \vartheta^0 + B_1 \sin \vartheta^0) \\
& - 6 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{a} (A_1 \sin \vartheta^0 - B_1 \cos \vartheta^0) t \\
& + \frac{3}{2} \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} (A_1 \cos \vartheta^0 + B_1 \sin \vartheta^0) t^2 \\
& + H_1 (A^2 + B^2) \sin(\vartheta^0 + \theta_0) + H_2 (A^2 + B^2) t \cos(\vartheta^0 + \theta_0) \\
& + H_3 (A^2 + B^2) t^2 \sin(\vartheta^0 + \theta_0) \\
& + H_4 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\vartheta^0 - \theta_0) + AB \cos(\vartheta^0 - \theta_0)] \\
& + H_5 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\vartheta^0 - \theta_0) - AB \sin(\vartheta^0 - \theta_0)] t \\
& + H_6 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\vartheta^0 - \theta_0) + AB \cos(\vartheta^0 - \theta_0)] t^2.
\end{aligned}$$

Observons que, dans ces valeurs de $\delta_1 \gamma$, $\delta_1 \theta$, $\int \delta_1 n\, dt$, et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1 \varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1 \lambda$ qui s'en déduisent, les termes d'argument ϑ^0 ont des coefficients du premier ordre au moins, et les termes d'arguments $\vartheta^0 \pm \theta_0$ des coefficients du second ordre.

Cas de $m'_2 = -1$.

Terme considéré de R_2 : $C\gamma' \cos \mathcal{A} = C\gamma' \cos(\vartheta - \theta')$.

Déterminons les six quantités $K_1, K_2, \ldots, K_6$ à l'aide des équations

$$K_3 = -\frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\eta}\right)_0 \mathcal{L} + X_0 \mathcal{L}^{\text{IV}}\right],$$

$$K_2 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[-\left(\frac{dX}{d\eta}\right)_0 \mathfrak{M} + X_0 \mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] - \frac{2}{\mu - h_0} K_3, \quad K_1 = \frac{1}{\mu - h_0} K_2,$$

$$K_6 = -\frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dX}{d\eta}\right)_0 \mathcal{L} - X_0 \mathcal{L}^{\text{IV}}\right],$$

$$K_5 = \frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dX}{d\eta}\right)_0 \mathfrak{M} + X_0 \mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] - \frac{2}{\mu + h_0} K_6, \qquad K_4 = \frac{1}{\mu + h_0} K_5.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Y et M; elles détermineront six nouvelles quantités $M_1, M_2, \ldots, M_6$; dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Z et P; elles détermineront encore six nouvelles quantités $P_1, P_2, \ldots, P_6$.

Déterminons ensuite les six quantités $L_1, L_2, \ldots, L_6$ à l'aide des équations

$$L_3 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dU}{d\eta}\right)_0 \mathcal{L} + U_0 \mathcal{L}^{\text{IV}}\right],$$

$$L_2 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[-\left(\frac{dU}{d\eta}\right)_0 \mathfrak{M} + U_0 \mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] + \frac{2}{\mu - h_0} L_3, \quad L_1 = -\frac{1}{\mu - h_0} L_2,$$

$$L_6 = \frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dU}{d\eta}\right)_0 \mathcal{L} - U_0 \mathcal{L}^{\text{IV}}\right],$$

$$L_5 = \frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dU}{d\eta}\right)_0 \mathfrak{M} + U_0 \mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] + \frac{2}{\mu + h_0} L_6, \qquad L_4 = -\frac{1}{\mu + h_0} L_5.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres V et N; elles détermineront six nouvelles quantités $N_1, N_2, \ldots, N_6$; dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres W et Q; elles détermineront encore six nouvelles quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$.

Déterminons enfin les six quantités $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_6$ à l'aide des équations

$$\Pi_1 = -3\frac{n}{(\mu-h_0)^2}\frac{P_2}{a} + 3\frac{n}{(\mu-h_0)^3}\frac{P_3}{a}, \quad \Pi_2 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu-h_0}\frac{P_2}{a} - 3\frac{n}{(\mu-h_0)^2}\frac{P_3}{a},$$

$$\Pi_3 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu-h_0}\frac{P_3}{a},$$

$$\Pi_4 = -3\frac{n}{(\mu+h_0)^2}\frac{P_5}{a} + 3\frac{n}{(\mu+h_0)^3}\frac{P_6}{a}, \quad \Pi_5 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu+h_0}\frac{P_5}{a} - 3\frac{n}{(\mu+h_0)^2}\frac{P_6}{a}.$$

$$\Pi_6 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu+h_0}\frac{P_6}{a}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
\delta_1\gamma = &-\frac{1}{\mu^2}X_0(A\cos\varpi^0 - B\sin\varpi^0) - \frac{1}{\mu}X_0(A\sin\varpi^0 + B\cos\varpi^0)t \\
&+\frac{2}{\mu^3}X_0(A_1\sin\varpi^0 + B_1\cos\varpi^0) - \frac{2}{\mu^2}X_0(A_1\cos\varpi^0 - B_1\sin\varpi^0)t \\
&-\frac{1}{\mu}X_0(A_1\sin\varpi^0 + B_1\cos\varpi^0)t^2 \\
&+K_1(A^2+B^2)\cos(\varpi^0-\theta_0) + K_2(A^2+B^2)t\sin(\varpi^0-\theta_0) \\
&+K_3(A^2+B^2)t^2\cos(\varpi^0-\theta_0) \\
&+K_4\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\varpi^0+\theta_0) + AB\sin(\varpi^0+\theta_0)\right] \\
&+K_5\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\varpi^0+\theta_0) - AB\cos(\varpi^0+\theta_0)\right]t \\
&+K_6\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\varpi^0+\theta_0) + AB\sin(\varpi^0+\theta_0)\right]t^2.
\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace les lettres X et K par Y et M, on obtiendra la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace les lettres X et K par Z et P, on obtiendra la valeur de $\delta_1 a$. On aura

ensuite

$$\begin{aligned}
\delta_1 \theta = {} & \frac{1}{\mu^2} U_0 (A \sin \psi^0 + B \cos \psi^0) - \frac{1}{\mu} U_0 (A \cos \psi^0 - B \sin \psi^0) t \\
& + \frac{2}{\mu^3} U_0 (A_1 \cos \psi^0 - B_1 \sin \psi^0) + \frac{2}{\mu^2} U_0 (A_1 \sin \psi_0 + B_1 \cos \psi_0) t \\
& - \frac{1}{\mu} U_0 (A_1 \cos \psi^0 - B_1 \sin \psi^0) t^2 \\
& + L_1 (A^2 + B^2) \sin(\psi^0 - \theta_0) + L_2 (A^2 + B^2) t \cos(\psi^0 - \theta_0) \\
& + L_3 (A^2 + B^2) t^2 \sin(\psi^0 - \theta_0) \\
& + L_4 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\psi^0 + \theta_0) - AB \cos(\psi^0 + \theta_0)\right] \\
& + L_5 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\psi^0 + \theta_0) + AB \sin(\psi^0 + \theta_0)\right] t \\
& + L_6 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\psi^0 + \theta_0) - AB \cos(\psi^0 + \theta_0)\right] t^2.
\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace les lettres U et L par V et N, on obtiendra la valeur de $\delta_1 \varpi$; si l'on y remplace les lettres U et L par W et Q, on obtiendra la valeur de $\delta_1 \lambda$. On aura enfin

$$\begin{aligned}
\int \delta_1 n\, dt = {} & 3 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{a} (A \sin \psi^0 + B \cos \psi^0) \\
& - \frac{3}{2} \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} (A \cos \psi^0 - B \sin \psi^0) t \\
& + 9 \frac{n}{\mu^4} \frac{Z_0}{a} (A_1 \cos \psi^0 - B_1 \sin \psi^0) \\
& + 6 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{a} (A_1 \sin \psi^0 + B_1 \cos \psi^0) t \\
& - \frac{3}{2} \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} (A_1 \cos \psi^0 - B_1 \sin \psi^0) t^2 \\
& + \Pi_1 (A^2 + B^2) \sin(\psi^0 - \theta_0) + \Pi_2 (A^2 + B^2) t \cos(\psi^0 - \theta_0) \\
& + \Pi_3 (A^2 + B^2) t^2 \sin(\psi^0 - \theta_0) \\
& + \Pi_4 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\psi^0 + \theta_0) - AB \cos(\psi^0 + \theta_0)\right] \\
& + \Pi_5 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\psi^0 + \theta_0) + AB \sin(\psi^0 + \theta_0)\right] t \\
& + \Pi_6 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\psi^0 + \theta_0) - AB \cos(\psi^0 + \theta_0)\right] t^2.
\end{aligned}$$

Observons que, dans ces valeurs de $\delta_1 \gamma$, $\delta_1 \theta$, $\int \delta_1 n\, dt$, et dans les

valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1 \varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1 \lambda$ qui s'en déduisent, les termes d'argument $\mathfrak{b}^0$ ont des coefficients du premier ordre au moins, et que les termes d'arguments $\mathfrak{b}^0 \pm \theta_0$ ont des coefficients du second ordre.

Cas de $m'_2 = +2$.

Terme considéré de R_2 : $C\gamma'^2 \cos \mathfrak{b} = C\gamma'^2 \cos(\mathrm{b} + 2\theta')$.

On a

$$\begin{aligned}\delta_1 \gamma = \frac{4}{\mu^3} X_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos \mathrm{b}^0 - AB \sin \mathrm{b}^0] \\ + \frac{4}{\mu^2} X_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin \mathrm{b}^0 + AB \cos \mathrm{b}^0]t \\ - \frac{2}{\mu} X_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos \mathrm{b}^0 - AB \sin \mathrm{b}^0]t^2.\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre X par la lettre Y, on obtient la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace la lettre X par la lettre Z, on obtient la valeur de $\delta_1 a$. On a ensuite

$$\begin{aligned}\delta_1 \theta = -\frac{4}{\mu^3} U_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin \mathrm{b}^0 + AB \cos \mathrm{b}^0] \\ + \frac{4}{\mu^2} U_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos \mathrm{b}^0 - AB \sin \mathrm{b}^0]t \\ + \frac{2}{\mu} U_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin \mathrm{b}^0 + AB \cos \mathrm{b}^0]t^2.\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre U par la lettre V, on obtient la valeur de $\delta_1 \varpi$; si l'on y remplace la lettre U par la lettre W, on obtient la valeur de $\delta_1 \lambda$. On a enfin

$$\begin{aligned}\int \delta_1 n\, dt = -18 \frac{n}{\mu^4}\frac{Z_0}{a} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin \mathrm{b}^0 + AB \cos \mathrm{b}^0] \\ + 12 \frac{n}{\mu^3}\frac{Z_0}{a} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos \mathrm{b}^0 - AB \sin \mathrm{b}^0]t \\ + 3 \frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin \mathrm{b}^0 + AB \cos \mathrm{b}^0]t^2.\end{aligned}$$

Observons que, dans ces valeurs de $\delta_1 \gamma$, $\delta_1 \theta$, $\int \delta_1 n\, dt$, et dans les

valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1 \varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1 \lambda$ qui s'en déduisent, tous les termes sont du second ordre.

Cas de $m'_2 = -2$.

Terme considéré de R_2 : $C\gamma'^2 \cos \mathfrak{b} = C\gamma'^2 \cos(b - 2\theta')$.

On a

$$\begin{aligned}\delta_1 \gamma = \frac{4}{\mu^3} X_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 + AB \sin b^0\right] \\ + \frac{4}{\mu^2} X_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 - AB \cos b^0\right] t \\ - \frac{2}{\mu} X_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 + AB \sin b^0\right] t^2.\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre X par la lettre Y, on obtient la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace la lettre X par la lettre Z, on obtient la valeur de $\delta_1 a$. On a ensuite

$$\begin{aligned}\delta_1 \theta = -\frac{4}{\mu^3} U_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 - AB \cos b^0\right] \\ + \frac{4}{\mu^2} U_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 + AB \sin b^0\right] t \\ + \frac{2}{\mu} U_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 - AB \cos b^0\right] t^2.\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre U par la lettre V, on obtient la valeur de $\delta_1 \varpi$; si l'on y remplace la lettre U par la lettre W, on obtient la valeur de $\delta_1 \lambda$. On a enfin

$$\begin{aligned}\int \delta_1 n\, dt = -18 \frac{n}{\mu^4} \frac{Z_0}{a} \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 - AB \cos b^0\right] \\ + 12 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{a} \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 + AB \sin b^0\right] t \\ + 3 \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 - AB \cos b^0\right] t^2.\end{aligned}$$

Observons que, dans ces valeurs de $\delta_1 \gamma$, $\delta_1 \theta$, $\int \delta_1 n\, dt$, et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1 \varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1 \lambda$ qui s'en déduisent, tous les termes sont du second ordre.

Revenons maintenant aux formules $\frac{d\delta_2 n}{dt} = \delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$, $\frac{d\delta_2\lambda}{dt} = \delta_1 S$, qui doivent nous servir à calculer les deux parties $\int \delta_2 n\, dt$ et $\delta_2 \lambda$ de $\delta_2 l$. Chaque terme de l'une ou l'autre des quantités $\frac{3J}{a^2}$, S provient de l'un des termes de la fonction perturbatrice totale R et a le même argument. Par conséquent, on retrouvera dans $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et dans $\delta_1 S$ les arguments de la fonction R combinés par addition et soustraction avec les arguments $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{A}^0 \pm \theta_0$, $\mathcal{A}^0 \pm 2\theta_0$, $\mathcal{B}^0$, $\mathcal{B}^0 \pm \theta_0$, b^0 qui figurent dans les valeurs de $\delta_1 \gamma$, $\delta_1 \theta$, $\delta_1 e$, $\delta_1 \varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1 \lambda$, $\int \delta_1 n\, dt$. Représentons un argument quelconque de R par Ω, ou par $\Psi \pm \theta'$, ou par $\psi \pm 2\theta'$ [*], suivant que le coefficient de θ' y est égal ou à zéro, ou à ± 1, ou à ± 2; remplaçons d'ailleurs $\gamma' \sin\theta'$, $\gamma' \cos\theta'$ par leurs valeurs $At + A_1 t^2$, $Bt + B_1 t^2$, de manière que θ' ne figure plus dans les arguments. Alors, et en négligeant toujours les quantités d'ordre supérieur au second, $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$, $\delta_1 S$ se trouveront exprimés par des sommes de termes dont les arguments seront de l'une des formes suivantes :

$$\mathcal{A}^0 \pm \Omega,\quad \mathcal{A}^0 \pm \theta_0 \pm \Omega,\quad \mathcal{A}^0 \pm 2\theta_0 \pm \Omega,$$
$$\mathcal{B}^0 \pm \Omega,\quad \mathcal{B}^0 \pm \theta_0 \pm \Omega,\quad b^0 \pm \Omega,$$
$$\mathcal{A}^0 \pm \Psi,\quad \mathcal{A}^0 \pm \theta_0 \pm \Psi,\quad \mathcal{B}^0 \pm \Psi,\quad \mathcal{A}^0 \pm \psi.$$

Les coefficients de ces termes contiendront la variable γ et les angles θ, ϖ, λ entreront dans les parties $\pm\Omega$, $\pm\Psi$, $\pm\psi$ des arguments : or ces quantités γ, θ, ϖ, λ doivent encore être remplacées par $\gamma_0 + \Delta\gamma$, $\theta^0 + \Delta\theta$, $\varpi^0 + \Delta\varpi$, $\lambda^0 + \Delta\lambda$. Faisons cette substitution et appelons Ω^0, Ψ^0, ψ^0 les angles fonctions linéaires du temps auxquels se réduisent Ω, Ψ, ψ, lorsqu'on remplace l, ϖ, θ par l^0, ϖ^0, θ^0. Alors $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et $\delta_1 S$ se composeront de termes ayant des arguments de l'une des formes sui-

---

[*] Les lettres Ω, Ψ, ψ reçoivent ici et garderont désormais une signification différente de celle qui leur a été attribuée p. 30.

vantes :

$$\mathcal{A}^0 \pm \Omega^0,\quad \mathcal{A}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta_0,\quad \mathcal{A}^0 \pm \Omega^0 \pm 2\theta_0,$$
$$\mathcal{B}^0 \pm \Omega^0,\quad \mathcal{B}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta_0,\quad \mathfrak{b}^0 \pm \Omega^0,$$
$$\mathcal{A}^0 \pm \Psi^0,\quad \mathcal{A}^0 \pm \Psi^0 \pm \theta_0,\quad \mathcal{B}^0 \pm \Psi^0,\quad \mathcal{A}^0 \pm \psi^0.$$

Comme d'ailleurs les arguments qu'on vient d'énumérer appartiendront, à l'exception du premier, à des termes qui seront au moins du premier ordre, on pourra remplacer θ_0 par θ^0, qui n'en diffère que d'une quantité du second ordre. Nous regarderons donc définitivement $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et $\delta_1 S$ comme composés de termes dont les arguments sont de l'une des formes

$$\mathcal{A}^0 \pm \Omega^0,\quad \mathcal{A}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta^0,\quad \mathcal{A}^0 \pm \Omega^0 \pm 2\theta^0,$$
$$\mathcal{B}^0 \pm \Omega^0,\quad \mathcal{B}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta^0,\quad \mathfrak{b}^0 \pm \Omega^0,$$
$$\mathcal{A}^0 \pm \Psi^0,\quad \mathcal{A}^0 \pm \Psi^0 \pm \theta^0,\quad \mathcal{B}^0 \pm \Psi^0,\quad \mathcal{A}^0 \pm \psi^0.$$

Chacun des termes dont nous venons d'indiquer le calcul proviendra de la combinaison d'un certain terme de R_2 ayant pour argument $\mathcal{A}$, ou $\mathcal{B} \pm \theta'$, ou $\mathfrak{b} \pm 2\theta'$ avec un certain terme de R ayant pour argument Ω, ou $\Psi \pm \theta'$, ou $\psi \pm 2\theta'$. Nous avons à examiner maintenant quelles sont les combinaisons de ce genre qui peuvent nous donner, dans $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et dans $\delta_1 S$, des parties non périodiques, c'est-à-dire ne renfermant pas comme facteur le sinus ou le cosinus d'un angle qui varie avec le temps [*].

Or il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on obtienne de telles parties est que, dans quelqu'un des angles

$$(a)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \mathcal{A} \pm \Omega, & \mathcal{A} \pm \Omega \pm \theta, & \mathcal{A} \pm \Omega \pm 2\theta, & \\ \mathcal{B} \pm \Omega, & \mathcal{B} \pm \Omega \pm \theta, & \mathfrak{b} \pm \Omega, & \\ \mathcal{A} \pm \Psi, & \mathcal{A} \pm \Psi \pm \theta, & \mathcal{B} \pm \Psi, & \mathcal{A} \pm \psi, \end{array}\right.$$

[*] On se souviendra que nous regardons l'angle ϖ' comme une constante, et qu'ainsi un terme renfermant en facteur le sinus ou le cosinus d'un multiple de ϖ' ne doit pas être considéré comme périodique.

les coefficients de l, ϖ, θ, l' se réduisent tous les quatre à zéro, ou, ce qui est la même chose, qu'un des angles de cette liste se réduise soit à zéro, soit à un multiple de ϖ'. Il sera donc aisé, à l'inspection du développement de la fonction perturbatrice, de reconnaître quels termes de R_2 on doit associer à chaque terme de R.

Lorsqu'on néglige les puissances de γ' supérieures à la seconde, les coefficients des différents termes de R sont, comme on l'a déjà dit, de l'une des formes $C + \overline{C}\gamma'^2$, $C\gamma'$, $C\gamma'^2$; les quantités C, $\overline{C}$ peuvent elles-mêmes être développées suivant les puissances de γ, e, e', $\frac{a}{a'}$; nous pousserons ces développements jusqu'au quatrième degré, en regardant γ, e, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ comme du premier. Nous négligerons, par conséquent, les termes de R dans lesquels la somme des exposants de γ, e, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ serait supérieure à 4.

Le développement de R ainsi limité se compose de quatre cent huit termes. Le défaut d'espace nous empêche de transcrire ici les valeurs des coefficients; nous nous bornerons à donner la liste des arguments, en accompagnant chacun d'eux d'un numéro d'ordre qui servira à désigner le terme correspondant. On se rappellera d'ailleurs que le coefficient est de la forme $C + \overline{C}\gamma'^2$, ou $C\gamma'$, ou $C\gamma'^2$, selon que le multiplicateur de θ' dans l'argument est zéro, ou ± 1, ou ± 2.

Tableau des arguments des différents termes qui composent le développement de R.

Nos d'ordre.	ARGUMENTS.	Nos d'ordre.	ARGUMENTS	Nos d'ordre.	ARGUMENTS.
0.	0	9.	$3l - \varpi - 2l'$	18.	$l' + \varpi' - 2\theta'$
1.	$2l - 2l'$	10.	$2l - \theta - 2l' + \theta'$	19.	$3l' - \varpi' - 2\theta'$
2.	$2l - 2\theta'$	11.	$\theta - \theta'$	20.	$l - \varpi + 2l' - 2\theta'$
3.	$2l' - 2\theta'$	12.	$2l - \theta - \theta'$	21.	$l - \varpi - 2l' + 2\theta'$
4.	$l' - \varpi'$	13.	$-\theta + 2l' - \theta'$	22.	$2l' - 2\varpi'$
5.	$l - \varpi$	14.	$2l + l' - \varpi' - 2\theta'$	23.	$l - \varpi + l' - \varpi'$
6.	$2l - l' - \varpi'$	15.	$2l - l' + \varpi' - 2\theta'$	24.	$l - \varpi - l' + \varpi'$
7.	$2l - 3l' + \varpi'$	16.	$l + \varpi - 2\theta'$	25.	$2l - 2\varpi$
8.	$l + \varpi - 2l'$	17.	$3l - \varpi - 2\theta'$	26.	$2l - 4l' + 2\varpi$

Nos d'ordre.	ARGUMENTS.	Nos d'ordre.	ARGUMENTS.	Nos d'ordre	ARGUMENTS.
27.	$l+\varpi-l'-\varpi'$	72.	$l-3l'+2\theta'$	117.	$l-\varpi-\theta+l'-\varpi'+\theta'$
28.	$l+\varpi-3l'+\varpi'$	73.	$3l-l'-2\theta'$	118.	$l-\varpi-\theta-l'+\varpi'+\theta'$
29.	$3l-\varpi-l'-\varpi'$	74.	$3l'-3\varpi'$	119.	$2l-2\varpi+\theta-\theta'$
30.	$3l-\varpi-3l'+\varpi'$	75.	$l-\varpi+2l'-2\varpi'$	120.	$2l-2\varpi-\theta+\theta'$
31.	$-2\varpi+2l'$	76.	$l-\varpi-2l'+2\varpi'$	121.	$2l-\theta+2l'-2\varpi'-\theta'$
32.	$4l-2\varpi-2l'$	77.	$2l-2\varpi+l'-\varpi'$	122.	$2l-\theta-2l'+2\varpi-\theta'$
33.	$2l-2\theta$	78.	$2l-2\varpi-l'+\varpi'$	123.	$l+\varpi-\theta+l'-\varpi'-\theta'$
34.	$-2\theta+2l'$	79.	$3l-3\varpi$	124.	$l+\varpi-\theta-l'+\varpi'-\theta'$
35.	$l-l'$	80.	$2l+l'-3\varpi'$	125.	$3l-\varpi-\theta+l'-\varpi'-\theta'$
36.	$3l-3l'$	81.	$2l-5l'+3\varpi'$	126.	$3l-\varpi-\theta-l'+\varpi'-\theta'$
37.	$2l-\theta-l'-\varpi'+\theta'$	82.	$l+\varpi-4l'+2\varpi'$	127.	$2\varpi-\theta-\theta'$
38.	$2l-\theta-3l'+\varpi'+\theta'$	83.	$3l-\varpi-4l'+2\varpi'$	128.	$4l-2\varpi-\theta-\theta'$
39.	$l+\varpi-\theta-2l'+\theta'$	84.	$-2\varpi+l'+\varpi'$	129.	$-\theta+4l'-2\varpi'-\theta'$
40.	$3l-\varpi-\theta-2l'+\theta'$	85.	$-2\varpi+3l'-\varpi'$	130.	$l-\varpi-\theta+l'+\varpi'-\theta'$
41.	$\theta+l'-\varpi'-\theta'$	86.	$4l-2\varpi-l'-\varpi'$	131.	$l-\varpi-\theta+3l'-\varpi'-\theta'$
42.	$-\theta+l'-\varpi'+\theta'$	87.	$4l-2\varpi-3l'+\varpi'$	132.	$l-\varpi+\theta-l'-\varpi'+\theta'$
43.	$l-\varpi+\theta-\theta'$	88.	$l-3\varpi+2l'$	133.	$l-\varpi+\theta-3l'+\varpi'+\theta'$
44.	$l-\varpi-\theta+\theta'$	89.	$5l-3\varpi-2l'$	134.	$2l-2\varpi-\theta+2l'-\theta'$
45.	$2l-\theta+l'-\varpi'-\theta'$	90.	$2l-2\theta+l'-\varpi'$	135.	$2l-2\varpi+\theta-2l'+\theta'$
46.	$2l-\theta-l'+\varpi'-\theta'$	91.	$2l-2\theta-l'+\varpi'$	136.	$2l-3\theta+\theta'$
47.	$l+\varpi-\theta-\theta'$	92.	$l+\varpi-2\theta$	137.	$2l-3\theta+2l'-\theta'$
48.	$3l-\varpi-\theta-\theta'$	93.	$3l-\varpi-2\theta$	138.	$l-\theta-l'+\theta'$
49.	$-\theta+l'+\varpi'-\theta'$	94.	$-2\theta+l'+\varpi'$	139.	$l+\theta-l'-\theta'$
50.	$-\theta+3l'-\varpi'-\theta'$	95.	$-2\theta+3l'-\varpi'$	140.	$3l-\theta-3l'+\theta'$
51.	$l-\varpi-\theta+2l'-\theta'$	96.	$l-\varpi-2\theta+2l'$	141.	$l-\theta+l'-\theta'$
52.	$l-\varpi+\theta-2l'+\theta'$	97.	$l-\varpi+2\theta-2l'$	142.	$l+\theta-3l'+\theta'$
53.	$2l-2\theta-2l'+2\theta'$	98.	$l-\varpi'$	143.	$3l-\theta-l'-\theta'$
54.	$2l-2\theta+2l'-2\theta'$	99.	$l-2l'+\varpi'$	144.	$2l-2\theta-l'-\varpi'+2\theta'$
55.	$2\theta-2\theta'$	100.	$-\varpi+l'$	145.	$2l-2\theta-3l'+\varpi'+2\theta'$
56.	$2l+2l'-2\varpi'-2\theta'$	101.	$2l-\varpi-l'$	146.	$l+\varpi-2\theta-2l'+2\theta'$
57.	$2l-2l'+2\varpi'-2\theta'$	102.	$3l-2l'-\varpi'$	147.	$3l-\varpi-2\theta-2l'+2\theta'$
58.	$l+\varpi+l'-\varpi'-2\theta'$	103.	$3l-4l'+\varpi'$	148.	$2l-2\theta+l'+\varpi'-2\theta'$
59.	$l+\varpi-l'+\varpi'-2\theta'$	104.	$2l+\varpi-3l'$	149.	$2l-2\theta+3l'-\varpi'-2\theta'$
60.	$3l-\varpi+l'-\varpi'-2\theta'$	105.	$4l-\varpi-3l'$	150.	$l+\varpi-2\theta+2l'-2\theta'$
61.	$3l-\varpi-l'+\varpi'-2\theta'$	106.	$2l-\theta-4l'+2\varpi'+\theta'$	151.	$3l-\varpi-2\theta+2l'-2\theta'$
62.	$2\varpi-2\theta'$	107.	$l+\varpi-\theta-l'-\varpi'+\theta'$	152.	$2\theta+l'-\varpi'-2\theta'$
63.	$4l-2\varpi-2\theta'$	108.	$l+\varpi-\theta-3l'+\varpi'+\theta'$	153.	$-2\theta+l'-\varpi'+2\theta'$
64.	$4l'-2\varpi'-2\theta'$	109.	$3l-\varpi-\theta-l'-\varpi'+\theta'$	154.	$l-\varpi+2\theta-2\theta'$
65.	$l-\varpi+l'+\varpi'-2\theta'$	110.	$3l-\varpi-\theta-3l'+\varpi'+\theta'$	155.	$l-\varpi-2\theta+2\theta'$
66.	$l-\varpi+3l'-\varpi'-2\theta'$	111.	$-2\varpi+\theta+2l'-\theta'$	156.	$2l+3l'-3\varpi'-2\theta'$
67.	$l-\varpi-l'-\varpi'+2\theta'$	112.	$4l-2\varpi-\theta-2l'+\theta'$	157.	$2l-3l'+3\varpi'-2\theta'$
68.	$l-\varpi-3l'+\varpi'+2\theta'$	113.	$\theta+2l'-2\varpi'-\theta'$	158.	$l+\varpi+2l'-2\varpi'-2\theta'$
69.	$2l-2\varpi+2l'-2\theta'$	114.	$-\theta+2l'-2\varpi'+\theta'$	159.	$l+\varpi-2l'+2\varpi'-2\theta'$
70.	$2l-2\varpi-2l'+2\theta'$	115.	$l-\varpi+\theta+l'-\varpi'-\theta'$	160.	$3l-\varpi+2l'-2\varpi'-2\theta'$
71.	$l+l'-2\theta'$	116.	$l-\varpi+\theta-l'+\varpi'-\theta'$	161.	$3l-\varpi-2l'+2\varpi'-2\theta'$

Nos d'ordre.	ARGUMENTS.	Nos d'ordre.	ARGUMENTS.	Nos d'ordre.	ARGUMENTS.
162.	$2\varpi + l' - \varpi' - 2\theta'$	207.	$l - 3\varpi + 3l' - \varpi'$	252.	$-2\varpi + \theta + l' + \varpi' - \theta'$
163.	$-2\varpi + l' - \varpi' + 2\theta'$	208.	$5l - 3\varpi - l' - \varpi'$	253.	$-2\varpi + \theta + 3l' - \varpi' - \theta'$
164.	$4l - 2\varpi + l' - \varpi' - 2\theta'$	209.	$5l - 3\varpi - 3l' + \varpi'$	254.	$4l - 2\varpi - \theta - l' - \varpi' + \theta'$
165.	$4l - 2\varpi - l' + \varpi' - 2\theta'$	210.	$2l - 4\varpi + 2l'$	255.	$4l - 2\varpi - \theta - 3l' + \varpi' + \theta'$
166.	$l - 3\varpi + 2\theta'$	211.	$6l - 4\varpi - 2l'$	256.	$l - 3\varpi + \theta + 2l' - \theta'$
167.	$5l - 3\varpi - 2\theta'$	212.	$2l - 2\theta + 2l' - 2\varpi'$	257.	$5l - 3\varpi - \theta - 2l' + \theta'$
168.	$l' - 3\varpi' + 2\theta'$	213.	$2l - 2\theta - 2l' + 2\varpi'$	258.	$\theta + 3l' - 3\varpi' - \theta'$
169.	$5l' - 3\varpi' - 2\theta'$	214.	$l + \varpi - 2\theta + l' - \varpi'$	259.	$-\theta + 3l' - 3\varpi' + \theta'$
170.	$l - \varpi + 4l' - 2\varpi' - 2\theta'$	215.	$l + \varpi - 2\theta - l' + \varpi'$	260.	$l - \varpi + \theta + 2l' - 2\varpi' - \theta'$
171.	$l - \varpi - 4l' + 2\varpi' + 2\theta'$	216.	$3l - \varpi - 2\theta + l' - \varpi'$	261.	$l - \varpi + \theta - 2l' + 2\varpi' - \theta'$
172.	$2l - 2\varpi + l' + \varpi' - 2\theta'$	217.	$3l - \varpi - 2\theta - l' + \varpi'$	262.	$l - \varpi - \theta + 2l' - 2\varpi' + \theta'$
173.	$2l - 2\varpi + 3l' - \varpi' - 2\theta'$	218.	$2\varpi - 2\theta$	263.	$l - \varpi - \theta - 2l' + 2\varpi' + \theta'$
174.	$2l - 2\varpi - l' - \varpi' + 2\theta'$	219.	$4l - 2\varpi - 2\theta$	264.	$2l - 2\varpi + \theta + l' - \varpi' - \theta'$
175.	$2l - 2\varpi - 3l' + \varpi' + 2\theta'$	220.	$-2\theta + 4l' - 2\varpi'$	265.	$2l - 2\varpi + \theta - l' + \varpi' - \theta'$
176.	$3l - 3\varpi + 2l' - 2\theta'$	221.	$l - \varpi - 2\theta + l' + \varpi'$	266.	$2l - 2\varpi - \theta + l' - \varpi' + \theta'$
177.	$3l - 3\varpi - 2l' + 2\theta'$	222.	$l - \varpi - 2\theta + 3l' - \varpi'$	267.	$2l - 2\varpi - \theta - l' + \varpi' + \theta'$
178.	$l + \varpi' - 2\theta'$	223.	$l - \varpi + 2\theta - l' - \varpi'$	268.	$3l - 3\varpi + \theta - \theta'$
179.	$l + 2l' - \varpi' - 2\theta'$	224.	$l - \varpi + 2\theta - 3l' + \varpi'$	269.	$3l - 3\varpi - \theta + \theta'$
180.	$\varpi + l' - 2\theta'$	225.	$2l - 2\varpi - 2\theta + 2l'$	270.	$2l - \theta + 3l' - 3\varpi' - \theta'$
181.	$2l - \varpi + l' - 2\theta'$	226.	$2l - 2\varpi + 2\theta - 2l'$	271.	$2l - \theta - 3l' + 3\varpi' - \theta'$
182.	$l - 2l' - \varpi' + 2\theta'$	227.	$2l - 4\theta + 2l'$	272.	$l + \varpi - \theta + 2l' - 2\varpi' - \theta'$
183.	$l - 4l' + \varpi' + 2\theta'$	228.	$l + l' - 2\varpi'$	273.	$l + \varpi - \theta - 2l' + 2\varpi' - \theta'$
184.	$-\varpi + 3l' - 2\theta'$	229.	$l - 3l' + 2\varpi'$	274.	$3l - \varpi - \theta + 2l' - 2\varpi' - \theta'$
185.	$2l - \varpi - 3l' + 2\theta'$	230.	$\varpi - \varpi'$	275.	$3l - \varpi - \theta - 2l' + 2\varpi' - \theta'$
186.	$3l - \varpi' - 2\theta'$	231.	$-\varpi + 2l' - \varpi'$	276.	$2\varpi - \theta + l' - \varpi' - \theta'$
187.	$3l - 2l' + \varpi' - 2\theta'$	232.	$2l - \varpi - \varpi'$	277.	$-2\varpi + \theta + l' - \varpi' + \theta'$
188.	$2l + \varpi - l' - 2\theta'$	233.	$2l - \varpi - 2l' + \varpi'$	278.	$4l - 2\varpi - \theta + l' - \varpi' - \theta'$
189.	$4l - \varpi - l' - 2\theta'$	234.	$l - 2\varpi + l'$	279.	$4l - 2\varpi - \theta - l' + \varpi' - \theta'$
190.	$4l' - 4\varpi'$	235.	$3l - 2\varpi - l'$	280.	$l - 3\varpi + \theta + \theta'$
191.	$l - \varpi + 3l' - 3\varpi'$	236.	$3l - l' - 2\varpi'$	281.	$5l - 3\varpi - \theta - \theta'$
192.	$l - \varpi - 3l' + 3\varpi'$	237.	$3l - 5l' + 2\varpi'$	282.	$\theta + l' - 3\varpi' + \theta'$
193.	$2l - 2\varpi + 2l' - 2\varpi'$	238.	$2l + \varpi - 2l' - \varpi'$	283.	$-\theta + 5l' - 3\varpi' - \theta'$
194.	$2l - 2\varpi - 2l' + 2\varpi'$	239.	$2l + \varpi - 4l' + \varpi'$	284.	$l - \varpi - \theta + 4l' - 2\varpi' - \theta'$
195.	$3l - 3\varpi + l' - \varpi'$	240.	$4l - \varpi - 2l' - \varpi'$	285.	$l - \varpi + \theta - 4l' + 2\varpi' + \theta'$
196.	$3l - 3\varpi - l' + \varpi'$	241.	$4l - \varpi - 4l' + \varpi'$	286.	$2l - 2\varpi - \theta + l' + \varpi' - \theta'$
197.	$4l - 4\varpi$	242.	$l + 2\varpi - 3l'$	287.	$2l - 2\varpi - \theta + 3l' - \varpi' - \theta'$
198.	$2l + 2l' - 4\varpi'$	243.	$5l - 2\varpi - 3l'$	288.	$2l - 2\varpi + \theta - l' - \varpi' + \theta'$
199.	$2l - 6l' + 4\varpi'$	244.	$l - 2\theta + l'$	289.	$2l - 2\varpi + \theta - 3l' + \varpi' + \theta'$
200.	$l + \varpi + l' - 3\varpi'$	245.	$3l - 2\theta - l'$	290.	$3l - 3\varpi - \theta + 2l' - \theta'$
201.	$l + \varpi - 5l' + 3\varpi'$	246.	$l + 2\theta - 3l'$	291.	$3l - 3\varpi + \theta - 2l' + \theta'$
202.	$3l - \varpi + l' - 3\varpi'$	247.	$4l - 4l'$	292.	$2l - 3\theta + l' - \varpi' + \theta'$
203.	$3l - \varpi - 5l' + 3\varpi'$	248.	$2l - \theta + l' - 3\varpi' + \theta'$	293.	$2l - 3\theta - l' + \varpi' + \theta'$
204.	$-2\varpi + 4l' - 2\varpi'$	249.	$2l - \theta - 5l' + 3\varpi' + \theta'$	294.	$l + \varpi - 3\theta + \theta'$
205.	$4l - 2\varpi - 4l' + 2\varpi'$	250.	$l + \varpi - \theta - 4l' + 2\varpi' + \theta'$	295.	$3l - \varpi - 3\theta + \theta'$
206.	$l - 3\varpi + l' + \varpi'$	251.	$3l - \varpi - \theta - 4l' + 2\varpi' + \theta'$	296.	$2l - 3\theta + l' + \varpi' - \theta'$

Nos d'ordre	ARGUMENTS.	Nos d'ordre.	ARGUMENTS.	Nos d'ordre	ARGUMENTS.
297.	$2l-3\theta+3l'-\varpi'-\theta'$	334.	$3l-\varpi-2\theta+l'+\varpi'-2\theta'$	371.	$3l-3\varpi+3l'-\varpi'-2\theta'$
298.	$l+\varpi-3\theta+2l'-\theta'$	335.	$3l-\varpi-2\theta+3l'-\varpi'-2\theta'$	372.	$3l-3\varpi-l'-\varpi'+2\theta'$
299.	$3l-\varpi-3\theta+2l'-\theta'$	336.	$2\varpi-2\theta+2l'-2\theta'$	373.	$3l-3\varpi-3l'+\varpi'+2\theta'$
300.	$l-\theta-\varpi'+\theta'$	337.	$4l-2\varpi-2\theta+2l'-2\theta'$	374.	$4l-4\varpi+2l'-2\theta'$
301.	$l-\theta-2l'+\varpi'+\theta'$	338.	$2\theta+2l'-2\varpi'-2\theta'$	375.	$4l-4\varpi-2l'+2\theta'$
302.	$-\varpi+\theta+l'-\theta'$	339.	$-2\theta+2l'-2\varpi'+2\theta'$	376.	$2l-4\theta+2\theta'$
303.	$2l-\varpi-\theta-l'+\theta'$	340.	$l-\varpi+2\theta+l'-\varpi'-2\theta'$	377.	$l-l'+2\varpi'-2\theta'$
304.	$l+\theta-\varpi'-\theta'$	341.	$l-\varpi+2\theta-l'+\varpi'-2\theta'$	378.	$l+3l'-2\varpi'-2\theta'$
305.	$l+\theta-2l'+\varpi'-\theta'$	342.	$l-\varpi-2\theta+l'-\varpi'+2\theta'$	379.	$\varpi+\varpi'-2\theta'$
306.	$-\varpi-\theta+l'+\theta'$	343.	$l-\varpi-2\theta-l'+\varpi'+2\theta'$	380.	$\varpi+2l'-\varpi'-2\theta'$
307.	$2l-\varpi+\theta-l'-\theta'$	344.	$2l-2\varpi+2\theta-2\theta'$	381.	$2l-\varpi+\varpi'-2\theta'$
308.	$3l-\theta-2l'-\varpi'+\theta'$	345.	$2l-2\varpi-2\theta+2\theta'$	382.	$2l-\varpi+2l'-\varpi'-2\theta'$
309.	$3l-\theta-4l'+\varpi'+\theta'$	346.	$2l+4l'-4\varpi'-2\theta'$	383.	$l-2\varpi-l'+2\theta'$
310.	$2l+\varpi-\theta-3l'+\theta'$	347.	$2l-4l'+4\varpi'-2\theta'$	384.	$3l-2\varpi+l'-2\theta'$
311.	$4l-\varpi-\theta-3l'+\theta'$	348.	$l+\varpi+3l'-3\varpi'-2\theta'$	385.	$l-l'-2\varpi'+2\theta'$
312.	$l-\theta+\varpi'-\theta'$	349.	$l+\varpi-3l'+3\varpi'-2\theta'$	386.	$l-5l'+2\varpi'+2\theta'$
313.	$l-\theta+2l'-\varpi'-\theta'$	350.	$3l-\varpi+3l'-3\varpi'-2\theta'$	387.	$-\varpi+2l'+\varpi'-2\theta'$
314.	$\varpi-\theta+l'-\theta'$	351.	$3l-\varpi-3l'+3\varpi'-2\theta'$	388.	$-\varpi+4l'-\varpi'-2\theta'$
315.	$2l-\varpi-\theta+l'-\theta'$	352.	$2\varpi+2l'-2\varpi'-2\theta'$	389.	$2l-\varpi-2l'-\varpi'+2\theta'$
316.	$l+\theta-2l'-\varpi'+\theta'$	353.	$-2\varpi+2l'-2\varpi'+2\theta'$	390.	$2l-\varpi-4l'+\varpi'+2\theta'$
317.	$l+\theta-4l'+\varpi'+\theta'$	354.	$4l-2\varpi+2l'-2\varpi'-2\theta'$	391.	$l-2\varpi+3l'-2\theta'$
318.	$-\varpi-\theta+3l'-\theta'$	355.	$4l-2\varpi-2l'+2\varpi'-2\theta'$	392.	$3l-2\varpi-3l'+2\theta'$
319.	$2l-\varpi+\theta-3l'+\theta'$	356.	$l-3\varpi+l'-\varpi'+2\theta'$	393.	$3l+l'-2\varpi'-2\theta'$
320.	$3l-\theta-\varpi'-\theta'$	357.	$l-3\varpi-l'+\varpi'+2\theta'$	394.	$3l-3l'+2\varpi'-2\theta'$
321.	$3l-\theta-2l'+\varpi'-\theta'$	358.	$5l-3\varpi+l'-\varpi'-2\theta'$	395.	$2l+\varpi-\varpi'-2\theta'$
322.	$2l+\varpi-\theta-l'-\theta'$	359.	$5l-3\varpi-l'+\varpi'-2\theta'$	396.	$2l+\varpi-2l'+\varpi'-2\theta'$
323.	$4l-\varpi-\theta-l'-\theta'$	360.	$2l-4\varpi+2\theta'$	397.	$4l-\varpi-\varpi'-2\theta'$
324.	$2l-2\theta-4l'+2\varpi'+2\theta'$	361.	$6l-4\varpi-2\theta'$	398.	$4l-\varpi-2l'+\varpi'-2\theta'$
325.	$l+\varpi-2\theta-l'-\varpi'+2\theta'$	362.	$2l'-4\varpi'+2\theta'$	399.	$l+2\varpi-l'-2\theta'$
326.	$l+\varpi-2\theta-3l'+\varpi'+2\theta'$	363.	$6l'-4\varpi'-2\theta'$	400.	$5l-2\varpi-l'-2\theta'$
327.	$3l-\varpi-2\theta-l'-\varpi'+2\theta'$	364.	$l-\varpi-l'+3\varpi'-2\theta'$	401.	$l-2\theta-l'+2\theta'$
328.	$3l-\varpi-2\theta-3l'+\varpi'+2\theta'$	365.	$l-\varpi+5l'-3\varpi'-2\theta'$	402.	$l+2\theta-l'-2\theta'$
329.	$-2\varpi+2\theta+2l'-2\theta'$	366.	$l-\varpi+l'-3\varpi'+2\theta'$	403.	$3l-2\theta-3l'+2\theta'$
330.	$4l-2\varpi-2\theta-2l'+2\theta'$	367.	$l-\varpi-5l'+3\varpi'+2\theta'$	404.	$3l-2\theta+l'-2\theta'$
331.	$2l-2\theta+4l'-2\varpi'-2\theta'$	368.	$2l-2\varpi+4l'-2\varpi'-2\theta'$	405.	$l-2\theta+3l'-2\theta'$
332.	$l+\varpi-2\theta+l'+\varpi'-2\theta'$	369.	$2l-2\varpi-4l'+2\varpi'+2\theta'$	406.	$2l-4l'+2\theta'$
333.	$l+\varpi-2\theta+3l'-\varpi'-2\theta'$.	370.	$3l-3\varpi+l'+\varpi'-2\theta'$	407.	$4l-2l'-2\theta'$

Le développement de R_2 s'obtient en supprimant dans le développement de R les trois termes qui portent, dans le tableau précédent, les nos 0, 11 et 55.

Cherchons maintenant quels termes de R_2 il faut associer à chaque

10..

terme de R. Les termes étant désignés par leurs numéros d'ordre, conformément au tableau ci-dessus, prenons d'abord dans R le terme 0. Il est de la forme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\Omega$, l'argument Ω se réduisant ici à zéro; les angles à considérer dans la liste (a), page 71, sont donc $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \pm \theta$, $\mathcal{A} \pm 2\theta$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \pm \theta$, b. Comme d'ailleurs la somme des multiplicateurs de l, ϖ, θ, l', ϖ' est toujours zéro dans $\mathcal{A}$, ± 1 dans $\mathcal{B}$, ± 2 dans b, pour qu'un des angles $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \pm \theta$, $\mathcal{A} \pm 2\theta$ se réduise soit à zéro, soit à un multiple de ϖ', il faut qu'on ait $\mathcal{A} = 0$, ou $\mathcal{A} = \pm(2\theta - 2\varpi')$; pour qu'un des angles $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \pm \theta$ se réduise à zéro ou à un multiple de ϖ', il faut qu'on ait $\mathcal{B} = \pm\theta$, ou $\mathcal{B} = \pm(\theta - 2\varpi')$; enfin, pour que b se réduise à un multiple de ϖ', il faut qu'on ait $\mathrm{b} = 2\varpi'$. Aucun des termes de R_2 compris dans le développement précédent ne satisfait à l'une ou à l'autre de ces conditions : ainsi aucun terme de R_2, associé au terme 0 de R, ne donne de partie non périodique dans $\delta_2 l$.

Prenons ensuite dans R le terme 1. Il est encore de la forme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\Omega$, Ω étant égal à $2l - 2l'$: il faut donc ici que l'un des angles $\mathcal{A} \pm (2l - 2l')$, $\mathcal{A} \pm (2l - 2l') \pm \theta$, $\mathcal{A} \pm (2l - 2l') \pm 2\theta$, $\mathcal{B} \pm (2l - 2l')$, $\mathcal{B} \pm (2l - 2l') \pm \theta$, $\mathrm{b} \pm (2l - 2l')$ se réduise à zéro ou à un multiple de ϖ'. Comme, dans notre développement de R, les arguments sont toujours écrits de façon que le multiplicateur de l y ait le signe $+$, on ne pourra satisfaire à la condition énoncée qu'en faisant l'une des hypothèses suivantes :

$$\mathcal{A} = 2l - 2l', \qquad \mathcal{A} = 2l + 2\theta - 2l' - 2\varpi', \qquad \mathcal{A} = 2l - 2\theta - 2l' + 2\varpi',$$
$$\mathcal{B} = 2l + \theta - 2l' \qquad \mathcal{B} = 2l - \theta - 2l' \qquad \mathcal{B} = 2l + \theta - 2l' - 2\varpi',$$
$$\mathcal{B} = 2l - \theta - 2l' + 2\varpi', \quad \mathrm{b} = 2l - 2l' + 2\varpi', \qquad \mathrm{b} = 2l - 2l' - 2\varpi'.$$

De ces neuf hypothèses, la première est vérifiée par le terme 1 de R_2, la troisième par le terme 213, la cinquième par le terme 10, la septième par le terme 122 et la huitième par le terme 57; les autres ne sont vérifiées par aucun des termes de R_2 compris dans notre développement. Ainsi on obtiendra des parties non périodiques de $\delta_2 l$ en associant au terme 1 de R les termes 1, 10, 57, 122, 213 de R_2.

En continuant ainsi, on verra quels termes de R_2 doivent être associés avec chaque terme de R, et on trouvera que le nombre des com-

binaisons satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus est de 763. Mais, avant d'en écrire le tableau, il convient d'expliquer le partage de ces combinaisons en un certain nombre de groupes pour chacun desquels on peut construire des formules générales donnant les parties non périodiques correspondantes de $\delta_2 l$.

Si l'argument du terme pris dans R, ou, pour parler plus brièvement, si l'argument de R est de la forme Ω, c'est-à-dire ne contient pas θ', l'argument de R_2 devra être de l'une des formes

$$\mathcal{A}, \quad \mathcal{B} + \theta', \quad \mathcal{B} - \theta', \quad b + 2\theta', \quad b - 2\theta'.$$

Si l'argument de R_2 est de la forme $\mathcal{A}$, on devra avoir $\mathcal{A} = \Omega$, ou $\mathcal{A} = \Omega - 2\theta + 2\varpi'$, ou $\mathcal{A} = \Omega + 2\theta - 2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{B} + \theta'$, on devra avoir $\mathcal{B} = \Omega - \theta$, ou $\mathcal{B} = \Omega + \theta - 2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{B} - \theta'$, on devra avoir $\mathcal{B} = \Omega + \theta$, ou $\mathcal{B} = \Omega - \theta + 2\varpi'$; s'il est de la forme $b + 2\theta'$, on devra avoir $b = \Omega - 2\varpi'$; s'il est de la forme $b - 2\theta'$, on devra avoir $b = \Omega + 2\varpi'$.

Si l'argument de R est de la forme $\Psi + \theta'$, celui de R_2 devra être de l'une des formes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} + \theta'$, $\mathcal{B} - \theta'$. S'il est de la forme $\mathcal{A}$, on devra avoir $\mathcal{A} = \Psi + \theta$, ou $\mathcal{A} = \Psi - \theta + 2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{B} + \theta'$, on devra avoir $\mathcal{B} = \Psi$; s'il est de la forme $\mathcal{B} - \theta'$, on devra avoir $\mathcal{B} = \Psi + 2\varpi'$.

Si l'argument de R est de la forme $\Psi - \theta'$, celui de R_2 devra être de l'une des formes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} + \theta'$, $\mathcal{B} - \theta'$. S'il est de la forme $\mathcal{A}$, on devra avoir $\mathcal{A} = \Psi - \theta$, ou $\mathcal{A} = \Psi + \theta - 2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{B} + \theta'$, on devra avoir $\mathcal{B} = \Psi - 2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{B} - \theta'$, on devra avoir $\mathcal{B} = \Psi$.

Si l'argument de R est de la forme $\psi + 2\theta'$, celui de R_2 devra être de la forme $\mathcal{A}$, et on devra avoir $\mathcal{A} = \psi + 2\varpi'$.

Enfin, si l'argument de R est de la forme $\psi - 2\theta'$, celui de R_2 devra encore être de la forme $\mathcal{A}$; mais on devra avoir $\mathcal{A} = \psi - 2\varpi'$.

On est conduit par là à distinguer dix-neuf cas, que nous rangerons dans l'ordre indiqué par le tableau suivant :

	ARGUMENT de R.	ARGUMENT de R_2.	RELATION ENTRE LES DEUX ARGUMENTS.
1[er] cas.........	Ω	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Omega$
2[e] cas..........	Ω	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Omega - 2\theta + 2\varpi'$
3[e] cas..........	Ω	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Omega + 2\theta - 2\varpi$
4[e] cas..........	Ω	$\mathcal{B} - \theta'$	$\mathcal{B} = \Omega + \theta$
5[e] cas..........	Ω	$\mathcal{B} - \theta'$	$\mathcal{B} = \Omega - \theta + 2\varpi'$
6[e] cas..........	Ω	$\mathcal{B} + \theta'$	$\mathcal{B} = \Omega - \theta$
7[e] cas..........	Ω	$\mathcal{B} + \theta'$	$\mathcal{B} = \Omega + \theta - 2\varpi'$
8[e] cas..........	$\Psi + \theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Psi + \theta$
9[e] cas..........	$\Psi + \theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Psi - \theta + 2\varpi'$
10[e] cas..........	$\Psi - \theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Psi - \theta$
11[e] cas..........	$\Psi - \theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Psi + \theta - 2\varpi'$
12[e] cas..........	Ω	$\mathfrak{b} - 2\theta'$	$\mathfrak{b} = \Omega + 2\varpi'$
13[e] cas..........	Ω	$\mathfrak{b} + 2\theta'$	$\mathfrak{b} = \Omega - 2\varpi'$
14[e] cas..........	$\psi + 2\theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \psi + 2\varpi'$
15[e] cas..........	$\psi - 2\theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \psi - 2\varpi'$
16[e] cas..........	$\Psi + \theta'$	$\mathcal{B} + \theta'$	$\mathcal{B} = \Psi$
17[e] cas..........	$\Psi - \theta'$	$\mathcal{B} - \theta'$	$\mathcal{B} = \Psi$
18[e] cas..........	$\Psi + \theta'$	$\mathcal{B} - \theta'$	$\mathcal{B} = \Psi + 2\varpi'$
19[e] cas..........	$\Psi - \theta'$	$\mathcal{B} + \theta'$	$\mathcal{B} = \Psi - 2\varpi'$

Voici maintenant la répartition entre ces dix-neuf cas des sept cent soixante-trois combinaisons propres à fournir des parties non périodiques dans la longitude moyenne de la Lune. Dans chaque colonne de ce tableau, les nombres de gauche sont les numéros des termes de R, et les nombres de droite sont les numéros des termes de R_2, qu'on doit leur associer.

Tableau des 763 combinaisons réparties entre les 19 cas.

1[er] *cas.*	1[er] *cas* (suite).	1[er] *cas* (suite).	1[er] *cas* (suite).	1[er] *cas* (suite).	1[er] *cas* (suite).
1, 1	23, 23	31, 31	76, 76	84, 84	92, 92
4, 4	24, 24	32, 32	77, 77	85, 85	93, 93
5, 5	25, 25	33, 33	78, 78	86, 86	94, 94
6, 6	26, 26	34, 34	79, 79	87, 87	95, 95
7, 7	27, 27	35, 35	80, 80	88, 88	96, 96
8, 8	28, 28	36, 36	81, 81	89, 89	97, 97
9, 9	29, 29	74, 74	82, 82	90, 90	98, 98
22, 22	30, 30	75, 75	83, 83	91, 91	99, 99

1er *cas* (suite).

100, 100
101, 101
102, 102
103, 103
104, 104
105, 105
190, 190
191, 191
192, 192
193, 193
194, 194
195, 195
196, 196
197, 197
198, 198
199, 199
200, 200
201, 201
202, 202
203, 203
204, 204
205, 205
206, 206
207, 207
208, 208
209, 209
210, 210
211, 211
212, 212
213, 213
214, 214
215, 215
216, 216
217, 217
218, 218
219, 219
220, 220
221, 221
222, 222
223, 223
224, 224
225, 225
226, 226
227, 227
228, 228
229, 229
230, 230
231, 231
232, 232
233, 233
234, 234
235, 235
236, 236
237, 237
238, 238
239, 239
240, 240
241, 241
242, 242
243, 243
244, 244
245, 245
246, 246
247, 247

2e *cas*.

1, 213
4, 94
6, 91
22, 34
23, 221
27, 215
29, 217
74, 95
75, 96
80, 90
97, 76
190, 220
191, 222
193, 225
198, 212
200, 214
202, 216
212, 227
223, 24
224, 192
226, 194
228, 244
236, 245
245, 229

3e *cas*.

24, 223
34, 22
76, 97
90, 80
91, 6
94, 4
95, 74
96, 75
192, 224
194, 226
212, 198
213, 1
214, 200
215, 27
216, 202
217, 29
220, 190
221, 23
222, 191
225, 193
227, 212
229, 246
244, 228
245, 236

4e *cas*.

4, 41
5, 43
22, 113
23, 115
24, 116
25, 119
31, 111
33, 12
34, 13
35, 139
74, 258
75, 260
76, 261
77, 264
78, 265
79, 268
84, 252
85, 253
88, 256
90, 45
91, 46
92, 47
93, 48
94, 49
95, 50
96, 51
98, 304
99, 305
100, 302
101, 307
212, 121
213, 122
214, 123
215, 124
216, 125
217, 126
218, 127
219, 128
220, 129
221, 130
222, 131
225, 134
227, 137
244, 141
245, 143

5e *cas*.

1, 122
4, 49
6, 46
7, 271
8, 273
9, 275
22, 13
23, 130
27, 124
29, 126
74, 50
75, 51
77, 286
80, 45
86, 279
90, 296
97, 261
98, 312
102, 321
190, 129
191, 131
193, 134
198, 121
200, 123
202, 125
212, 137
223, 116
228, 141
236, 143

6e *cas*.

1, 10
4, 42
5, 44
6, 37
7, 38
8, 39
9, 40
22, 114
23, 117
24, 118
25, 120
26, 106
27, 107
28, 108
29, 109
30, 110
32, 112
33, 136
35, 138
36, 140
74, 259
75, 262
76, 263
77, 266
78, 267
79, 269
80, 248
81, 249
82, 250
83, 251
86, 254
87, 255
89, 257
90, 292
91, 293
92, 294
93, 295
97, 52
98, 300
99, 301
100, 306
101, 303
102, 308
103, 309
104, 310
105, 311
223, 132
224, 133
226, 135
246, 142

7e *cas*.

4, 282
24, 132
34, 114
76, 52
78, 288
84, 277
90, 248
91, 37
94, 42
95, 259
96, 262
99, 316
192, 133
194, 135
213, 10
215, 107
217, 109
221, 117
229, 142

8e *cas*.

10, 1
37, 6

8e *cas* (suite).

38,	7
39,	8
40,	9
42,	4
44,	5
52,	97
106,	26
107,	27
108,	28
109,	29
110,	30
112,	32
114,	22
117,	23
118,	24
120,	25
132,	223
133,	224
135,	226
136,	33
138,	35
140,	36
142,	246
248,	80
249,	81
250,	82
251,	83
254,	86
255,	87
257,	89
259,	74
262,	75
263,	76
266,	77
267,	78
269,	79
292,	90
293,	91
294,	92
295,	93
300,	98
301,	99
303,	101
306,	100
308,	102
309,	103
310,	104
311,	105

9e *cas*.

10,	213
37,	91
42,	94
52,	76
107,	215
109,	217
114,	34
117,	221
132,	24
133,	192
135,	194
142,	229
248,	90
259,	95
262,	96
277,	84
282,	4
288,	78
316,	99

10e *cas*.

12,	33
13,	34
41,	4
43,	5
45,	90
46,	91
47,	92
48,	93
49,	94
50,	95
51,	96
111,	31
113,	22
115,	23
116,	24
119,	25
121,	212
122,	213
123,	214
124,	215
125,	216
126,	217
127,	218
128,	219
129,	220
130,	221
131,	222
134,	225
137,	227
139,	35
141,	244
143,	245
252,	84
253,	85
256,	88
358,	74
260,	75
261,	76
264,	77
265,	78
268,	79
302,	100
304,	98
305,	99
307,	101

11e *cas*.

13,	22
45,	80
46,	6
49,	4
50,	74
51,	75
116,	223
121,	198
122,	1
123,	200
124,	27
125,	202
126,	29
129,	190
130,	23
131,	191
134,	193
137,	212
141,	228
143,	236
261,	97
271,	7
273,	8
275,	9
279,	86
286,	77
296,	90
312,	98
321,	102

12e *cas*.

1,	57
4,	18
6,	15
7,	157
8,	159
9,	161
22,	3
23,	65
24,	364
26,	347
27,	59
28,	349
29,	61
30,	351
32,	355
35,	377
36,	394
74,	19
75,	20
77,	172
80,	14
86,	165
90,	148
98,	178
102,	187
190,	64
191,	66
193,	69
195,	370
198,	56
200,	58
202,	60
208,	359
212,	54
214,	332
216,	334
223,	341
228,	71
230,	379
231,	387
232,	381
236,	73
238,	396
240,	398

13e *cas*.

4,	168
22,	362
23,	366
24,	67
26,	406
31,	353
34,	339
35,	385
76,	21
78,	174
84,	163
91,	144
94,	153
99,	182
192,	68
194,	70
196,	372
206,	356
213,	53
215,	325
217,	327
221,	342
229,	72
233,	389

14e *cas*.

21,	76
53,	213
67,	24
68,	192
70,	194
72,	229
144,	91
153,	94
163,	84
168,	4
174,	78
182,	99
325,	215
327,	217
339,	34
342,	221
353,	31
356,	206
362,	22
366,	23
372,	196
385,	35
389,	233
406,	26

15e *cas*.

3,	22
14,	80
15,	6
18,	4
19,	74
20,	75
54,	212
56,	198
57,	1
58,	200
59,	27
60,	202
61,	29
64,	190
65,	23
66,	191
69,	193
71,	228
73,	236
148,	90
157,	7
159,	8

15e *cas* (suite).	
161,	9
165,	86
172,	77
178,	98
187,	102
332,	214
334,	216
341,	223
347,	26
349,	28
351,	30
355,	32
359,	208
364,	24
370,	195
377,	35
379,	230
381,	232
387,	231
394,	36
396,	238
398,	240

16e *cas*.	
10,	10
37,	37
38,	38
39,	39
40,	40
42,	42
44,	44
52,	52
106,	106
107,	107
108,	108

16e *cas* (suite).	
109,	109
110,	110
112,	112
114,	114
117,	117
118,	118
120,	120
132,	132
133,	133
135,	135
136,	136
138,	138
140,	140
142,	142
248,	248
249,	249
250,	250
251,	251
254,	254
255,	255
257,	257
259,	259
262,	262
263,	263
266,	266
267,	267
269,	269
277,	277
280,	280
282,	282
285,	285
288,	288
289,	289
291,	291
292,	292
293,	293

16e *cas* (suite).	
294,	294
295,	295
300,	300
301,	301
303,	303
306,	306
308,	308
309,	309
310,	310
311,	311
316,	316
317,	317
319,	319

17e *cas*.	
12,	12
13,	13
41,	41
43,	43
45,	45
46,	46
47,	47
48,	48
49,	49
50,	50
51,	51
111,	111
113,	113
115,	115
116,	116
119,	119
121,	121
122,	122
123,	123
124,	124

17e *cas* (suite).	
125,	125
126,	126
127,	127
128,	128
129,	129
130,	130
131,	131
134,	134
137,	137
139,	139
141,	141
143,	143
252,	252
253,	253
256,	256
258,	258
260,	260
261,	261
264,	264
265,	265
268,	268
270,	270
271,	271
272,	272
273,	273
274,	274
275,	275
276,	276
278,	278
279,	279
281,	281
283,	283
284,	284
286,	286
287,	287
290,	290

17e *cas* (suite).	
296,	296
297,	297
298,	298
299,	299
302,	302
304,	304
305,	305
307,	307
312,	312
313,	313
314,	314
315,	315
318,	318
320,	320
321,	321
322,	322
323,	323

18e *cas*.	
10,	122
37,	46
38,	271
39,	273
40,	275
42,	49
52,	261
107,	124
109,	126
114,	13
117,	130
132,	116
248,	45
254,	279
259,	50
262,	51

18e *cas* (suite).	
266,	286
277,	252
282,	41
288,	265
292,	296
300,	312
308,	321
316,	305

19e *cas*.	
13,	114
41,	282
45,	248
46,	37
49,	42
50,	259
51,	262
116,	132
122,	10
124,	107
126,	109
130,	117
252,	277
261,	52
265,	288
271,	38
273,	39
275,	40
279,	254
286,	266
296,	292
305,	316
312,	300
321,	308

Nous allons donner maintenant, pour chacun des dix-neuf cas, les formules servant à calculer les parties non périodiques de $\delta_2 l$ correspondantes aux diverses combinaisons que ce cas comprend; mais il convient auparavant de définir quelques notations dont la signification sera la même dans toutes ces formules.

Lorsqu'un terme de la fonction perturbatrice sera considéré comme

appartenant à R_2, nous représenterons son coefficient par $C + \overline{C}\gamma'^2$, ou par $C\gamma'$, ou par $C\gamma'^2$, suivant que l'argument aura l'une des trois formes $\mathcal{A}$, ou $\mathcal{B} \pm \theta'$, ou $\mathfrak{b} \pm 2\theta'$. Pareillement, lorsqu'un terme de la fonction perturbatrice sera considéré comme appartenant à R, son coefficient sera représenté par $T + \overline{T}\gamma'^2$, ou par $T\gamma'$, ou par $T\gamma'^2$, selon que l'argument sera de l'une des trois formes Ω, ou $\Psi \pm \theta'$, ou $\mathfrak{b} \pm 2\theta'$.

Les lettres m, m_1, m_2, m' continueront à désigner les multiplicateurs de l, ϖ, θ, l' dans l'argument $\mathcal{A}$, ou $\mathcal{B} \pm \theta'$, ou $\mathfrak{b} \pm 2\theta'$ d'un terme de R_2 : on aura toujours

$$\mu = m(n + k^0) + m_1 j^0 + m_2 h^0 + m'n'.$$

Nous poserons [*]

$$\Upsilon = \frac{2}{a}\frac{dT}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{a^2 e}\frac{dT}{de} - \frac{\gamma}{2a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dT}{d\gamma},$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2a}\Upsilon + \frac{d\Upsilon}{da}\right), \quad c = \frac{1}{n}\frac{d\Upsilon}{d\gamma}, \quad d = \frac{1}{n}\frac{d\Upsilon}{de}, \quad f = -\frac{1}{n}\Upsilon,$$

et pareillement

$$\overline{\Upsilon} = \frac{2}{a}\frac{d\overline{T}}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{a^2 e}\frac{d\overline{T}}{de} - \frac{\gamma}{2a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\overline{T}}{d\gamma},$$

$$\overline{b} = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2a}\overline{\Upsilon} + \frac{d\overline{\Upsilon}}{da}\right), \quad \overline{c} = \frac{1}{n}\frac{d\overline{\Upsilon}}{d\gamma}, \quad \overline{d} = \frac{1}{n}\frac{d\overline{\Upsilon}}{de}, \quad \overline{f} = -\frac{1}{n}\overline{\Upsilon}.$$

Enfin nous ferons encore

$$g = -\frac{3m}{a^2}\frac{dT}{d\gamma}, \quad i = -\frac{3m}{a^2}\frac{dT}{de}, \quad r = -\frac{3m}{a^2}\frac{dT}{da} + \frac{6m}{a^3}T, \quad s = -\frac{3m}{a^2}T.$$

Cela posé, reprenons chacun des dix-neuf cas énumérés ci-dessus : calculons pour une combinaison quelconque de chacun d'eux, et con-

[*] La lettre Υ reçoit ici, et gardera dans la suite du Mémoire, une signification différente de celle qui lui a été attribuée p. 30.

formément aux indications déjà données, la partie non périodique de $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et celle de $\delta_1 S$; intégrons la première deux fois et la seconde une fois, puis ajoutons les résultats de ces intégrations. Nous obtiendrons ainsi la partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée. On laissera d'ailleurs de côté les termes constants ou proportionnels au temps, car ils peuvent être supposés compris dans la portion $l^0 = nt + \lambda^0$ de la longitude moyenne.

Nous allons écrire explicitement, pour chaque cas, les formules auxquelles on parvient en suivant cette marche; puis nous en ferons l'application aux diverses combinaisons que ce cas comprend.

Premier cas.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et on a $\mathcal{A} = \Omega$.

Soit

$$H = -\frac{1}{2\mu}\left[gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right] - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \tfrac{1}{2}\left[gK_2 + iM_2 + rP_2 + s(m_2L_2 + m_1N_2 + mQ_2)\right] + \frac{m}{2}sH_2,$$

$$H''' = \tfrac{1}{2}\left[-gK_5 - iM_5 - rP_5 + s(m_2L_5 + m_1N_5 + mQ_5)\right] + \frac{m}{2}sH_5,$$

$$H^{\mathrm{IV}} = \tfrac{1}{2}\left[gK_6 + iM_6 + rP_6 - s(m_2L_6 + m_1N_6 + mQ_6)\right] - \frac{m}{2}sH_6,$$

$$H^{\mathrm{V}} = \tfrac{1}{2}\left[gK_7 + iM_7 + rP_7 + s(m_2L_7 + m_1N_7 + mQ_7)\right] + \frac{m}{2}sH_7,$$

$$H^{\mathrm{VI}} = \tfrac{1}{2}\left[gK_8 + iM_8 + rP_8 + s(m_2L_8 + m_1N_8 + mQ_8)\right] + \frac{m}{2}sH_8,$$

$$\begin{aligned}\Phi' = {} & \tfrac{1}{2}\left(\mathcal{L}\mathcal{M}^{\mathrm{IV}} + \mathcal{M}\mathcal{L}^{\mathrm{IV}}\right)\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + H'_0 + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{dH'''}{d\gamma}\right)_0 - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{\mathrm{IV}}H'''_0 \\ & + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{dH^{\mathrm{IV}}}{d\gamma}\right)_0 + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{\mathrm{IV}}H^{\mathrm{IV}}_0 \\ & + \tfrac{1}{2}\mathcal{M}\left(\frac{dH^{\mathrm{V}}}{d\gamma}\right)_0 - \tfrac{1}{2}\mathcal{M}^{\mathrm{IV}}H^{\mathrm{V}}_0 + \tfrac{1}{2}\mathcal{M}\left(\frac{dH^{\mathrm{VI}}}{d\gamma}\right)_0 + \tfrac{1}{2}\mathcal{M}^{\mathrm{IV}}H^{\mathrm{VI}}_0,\end{aligned}$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\left[-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right] + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2\mu}\left[-\bar{c}X_0 - \bar{d}Y_0 - \bar{b}Z_0 + \bar{f}(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right] + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}\bar{f}\frac{Z_0}{a},$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[cK_3 + dM_3 + bP_3 + f(m_2L_3 + m_1N_3 + mQ_3)\right] + \frac{m}{2}f\Pi_3,$$

$$\Sigma'' = \tfrac{1}{2}\left[-cK_7 - dM_7 - bP_7 + f(m_2L_7 + m_1N_7 + mQ_7)\right] + \frac{m}{2}f\Pi_7,$$

$$\Sigma''' = \tfrac{1}{2}\left[-cK_8 - dM_8 - bP_8 + f(m_2L_8 + m_1N_8 + mQ_8)\right] + \frac{m}{2}f\Pi_8,$$

$$\Gamma = \tfrac{1}{4}\mathfrak{L}^2\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \mathfrak{N}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{L}^{\text{IV}2}\Sigma_0 + \Sigma'_0 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma'''}{d\gamma}\right)_0 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}^{\text{IV}}\Sigma''_0 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}^{\text{IV}}\Sigma'''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée est

$$\delta_2 l = \left(\tfrac{1}{6}\Phi' + \tfrac{1}{3}\Gamma\right)(A^2 + B^2)t^3 \text{ [*]}.$$

---

[*] Le calcul semble d'abord donner, dans le $\delta_2 l$ correspondant au premier cas, un terme en t^5 : on trouve en effet dans $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ un terme en t^3 qui peut s'écrire $(\mathfrak{N}^{\text{IV}}H_0 + H''_0)t^3$, en désignant par H'' l'expression

$$\tfrac{1}{2}\left[gK_4 + iM_4 + rP_4 + s(m_2L_4 + m_1N_4 + mQ_4)\right] + \frac{m}{2}s\Pi_4.$$

Mais on a (p. 55 et suiv.)

$$K_4 = \frac{1}{\mu}X_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},\quad M_4 = \frac{1}{\mu}Y_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},\quad P_4 = \frac{1}{\mu}Z_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},\quad L_4 = \frac{1}{\mu}U_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},$$
$$N_4 = \frac{1}{\mu}V_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},\quad Q_4 = \frac{1}{\mu}W_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},\quad \Pi_4 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_4}{a} = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a}\mathfrak{N}^{\text{IV}};$$

il suit de là

$$H'' = \frac{1}{2\mu}\left[gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right]\mathfrak{N}^{\text{IV}} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a}\mathfrak{N}^{\text{IV}} = -\mathfrak{N}^{\text{IV}}H,$$

ou bien

$$\mathfrak{N}^{\text{IV}}H + H'' = 0,$$

et par conséquent, en faisant $\gamma = \gamma_0$,

$$\mathfrak{N}^{\text{IV}}H_0 + H''_0 = 0.$$

Ainsi ce terme en t^3 de $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$, qui aurait produit un terme en t^5 dans $\int\delta_2 n\,dt$, se réduit à zéro.

Deuxième cas.

On prend dans R' le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et on a $\mathcal{A} = \Omega - 2\theta + 2\varpi'$.

Soit

$$H = -\frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 + 2)U_0 + m_1 V_0 + m W_0]\}$$
$$-\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \tfrac{1}{2}\{gK_5 + iM_5 + rP_5 - s[(m_2 + 2)L_5 + m_1 N_5 + mQ_5]\} - \frac{m}{2}s\Pi_5,$$

$$H'' = \tfrac{1}{2}\{gK_8 + iM_8 + rP_8 + s[(m_2 + 2)L_8 + m_1 N_8 + mQ_8]\} + \frac{m}{2}s\Pi_8,$$

$$H''' = \tfrac{1}{2}\{-gK_{15} - iM_{15} - rP_{15} + s[(m_2 + 2)L_{15} + m_1 N_{15} + mQ_{15}]\}$$
$$+\frac{m}{2}s\Pi_{15},$$

$$H^{IV} = \tfrac{1}{2}\{gK_{17} + iM_{17} + rP_{17} + s[(m_2 + 2)L_{17} + m_1 N_{17} + mQ_{17}]\}$$
$$+\frac{m}{2}s\Pi_{17},$$

$$H^{V} = \tfrac{1}{2}\{-gK_{19} - iM_{19} - rP_{19} + s[(m_2 + 2)L_{19} + m_1 N_{19} + mQ_{19}]\}$$
$$+\frac{m}{2}s\Pi_{19},$$

$$\Phi = -\tfrac{1}{4}\mathcal{L}^2\left(\frac{d^2H}{d\gamma^2}\right)_0 - \tfrac{1}{2}[\mathcal{R} + \mathcal{L}(2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{IV})]\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0$$
$$+\tfrac{1}{2}[2\mathcal{R}' + \mathcal{R}^{IV} - \tfrac{1}{2}(2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{IV})^2]H_0 - \mathcal{L}\left(\frac{dH''}{d\gamma}\right)_0 - (2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{IV})H''_0 + H'_0,$$

$$\Phi' = -\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\mathfrak{M}\left(\frac{d^2H}{d\gamma^2}\right)_0 + \tfrac{1}{2}[\mathcal{S} + \mathcal{L}(2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{IV}) - \mathfrak{M}(2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{IV})]\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0$$
$$+\tfrac{1}{2}[2\mathcal{S}' + \mathcal{S}^{IV} + (2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{IV})(2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{IV})]H_0 - \mathcal{L}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 - (2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{IV})H'_0$$
$$-\mathfrak{M}\left(\frac{dH''}{d\gamma}\right)_0 + (2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{IV})H''_0 + H^{V}_0,$$

$$\Phi'' = \tfrac{1}{4}\mathcal{M}^2\left(\frac{d^2 \mathrm{H}}{d\gamma^2}\right)_0 - \tfrac{1}{2}\left[\mathcal{T} + \mathcal{M}(2\mathcal{M}' + \mathcal{M}^{\mathrm{IV}})\right]\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[2\mathcal{T}' + \mathcal{T}^{\mathrm{IV}} + \tfrac{1}{2}(2\mathcal{M}' + \mathcal{M}^{\mathrm{IV}})^2\right]\mathrm{H}_0$$
$$+ \mathcal{M}\left(\frac{d\mathrm{H}'}{d\gamma}\right)_0 - (2\mathcal{M}' + \mathcal{M}^{\mathrm{IV}})\mathrm{H}'_0 + \mathrm{H}'''_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\left\{ - c\mathrm{X}_0 - d\mathrm{Y}_0 - b\mathrm{Z}_0 + f\left[(m_2 + 2)\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0\right]\right\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} f\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\Sigma' = \tfrac{1}{2}\left\{ c\mathrm{K}_5 + d\mathrm{M}_5 + b\mathrm{P}_5 + f\left[(m_2 + 2)\mathrm{L}_5 + m_1\mathrm{N}_5 + m\mathrm{Q}_5\right]\right\} + \frac{m}{2} f\Pi_5,$$

$$\Sigma'' = \tfrac{1}{2}\left\{ - c\mathrm{K}_8 - d\mathrm{M}_8 - b\mathrm{P}_8 + f\left[(m_2 + 2)\mathrm{L}_8 + m_1\mathrm{N}_8 + m\mathrm{Q}_8\right]\right\} + \frac{m}{2} f\Pi_8,$$

$$\Sigma''' = \tfrac{1}{2}\left\{ c\mathrm{K}_{17} + d\mathrm{M}_{17} + b\mathrm{P}_{17} - f\left[(m_2 + 2)\mathrm{L}_{17} + m_1\mathrm{N}_{17} + m\mathrm{Q}_{17}\right]\right\}$$
$$- \frac{m}{2} f\Pi_{17},$$

$$\Sigma^{\mathrm{IV}} = \tfrac{1}{2}\left\{ c\mathrm{K}_{19} + d\mathrm{M}_{19} + b\mathrm{P}_{19} + f\left[(m_2 + 2)\mathrm{L}_{19} + m_1\mathrm{N}_{19} + m\mathrm{Q}_{19}\right]\right\}$$
$$+ \frac{m}{2} f\Pi_{19},$$

$$\Gamma = \tfrac{1}{4}\mathcal{L}^2\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \tfrac{1}{2}\left[\mathcal{L}(\mathcal{L}^{\mathrm{IV}} + 2\mathcal{L}') + \mathcal{R}\right]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \left[\tfrac{1}{4}(\mathcal{L}^{\mathrm{IV}} + 2\mathcal{L}')^2 - \tfrac{1}{2}(\mathcal{R}^{\mathrm{IV}} + 2\mathcal{R}')\right]\Sigma_0 - \mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0 - (\mathcal{L}^{\mathrm{IV}} + 2\mathcal{L}')\Sigma''_0 + \Sigma^{\mathrm{IV}}_0,$$

$$\Gamma' = - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\mathcal{M}\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \tfrac{1}{2}\left[\mathcal{L}(\mathcal{M}^{\mathrm{IV}} + 2\mathcal{M}') - \mathcal{M}(\mathcal{L}^{\mathrm{IV}} + 2\mathcal{L}') + \mathcal{S}\right]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \left[\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}^{\mathrm{IV}} + 2\mathcal{L}')(\mathcal{M}^{\mathrm{IV}} + 2\mathcal{M}') + \tfrac{1}{2}(\mathcal{S}^{\mathrm{IV}} + 2\mathcal{S}')\right]\Sigma_0 - \mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0$$
$$- (\mathcal{L}^{\mathrm{IV}} + 2\mathcal{L}')\Sigma'_0 + \mathcal{M}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0 - (\mathcal{M}^{\mathrm{IV}} + 2\mathcal{M}')\Sigma''_0 + \Sigma'''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera (*voir* p. 49 la signification de A'_1 et de B'_1)

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi\mathrm{B}'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)\mathrm{A}'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right)\mathrm{B}'_1 t^2.$$

Troisième cas.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\Lambda$, et l'on a $\Lambda = \Omega + 2\vartheta - 2\varpi'$.

Soit

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 - 2)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} \\
&\quad + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},
\end{aligned}
$$

$$
H' = \tfrac{1}{2}\{-gK_6 - iM_6 - rP_6 + s[(m_2 - 2)L_6 + m_1N_6 + mQ_6]\} + \frac{m}{2}sH_6,
$$

$$
H'' = \tfrac{1}{2}\{gK_7 + iM_7 + rP_7 + s[(m_2 - 2)L_7 + m_1N_7 + mQ_7]\} + \frac{m}{2}sH_7,
$$

$$
\begin{aligned}
H''' &= \tfrac{1}{2}\{gK_{16} + iM_{16} + rP_{16} - s[(m_2 - 2)L_{16} + m_1N_{16} + mQ_{16}]\} \\
&\quad - \frac{m}{2}sH_{16},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H^{\text{IV}} &= \tfrac{1}{2}\{gK_{18} + iM_{18} + rP_{18} + s[(m_2 - 2)L_{18} + m_1N_{18} + mQ_{18}]\} \\
&\quad + \frac{m}{2}sH_{18},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H^{\text{V}} &= \tfrac{1}{2}\{gK_{20} + iM_{20} + rP_{20} - s[(m_2 - 2)L_{20} + m_1N_{20} + mQ_{20}]\} \\
&\quad - \frac{m}{2}sH_{20},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^2\left(\frac{d^2H}{d\gamma^2}\right)_0 - \frac{1}{2}[\mathcal{R} + \mathcal{L}(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})]\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}[2\mathcal{R}' - \mathcal{R}^{\text{IV}} - \tfrac{1}{2}(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})^2]H_0 \\
&\qquad - \mathcal{L}\left(\frac{dH''}{d\gamma}\right)_0 - (2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})H''_0 + H'''_0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi' &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}\mathcal{M}\left(\frac{d^2H}{d\gamma^2}\right)_0 + \frac{1}{2}[\mathcal{S} + \mathcal{L}(2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{IV}}) - \mathcal{M}(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})]\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}[2\mathcal{S}' - \mathcal{S}^{\text{IV}} + (2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})(2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{IV}})]H_0 - \mathcal{L}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 \\
&\qquad - (2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})H'_0 - \mathcal{M}\left(\frac{dH''}{d\gamma}\right)_0 + (2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{IV}})H''_0 + H^{\text{IV}}_0;
\end{aligned}
$$

$$\Phi'' = \frac{1}{4}\mathfrak{M}^2\left(\frac{d^2 H}{d\gamma^2}\right)_0 - \frac{1}{2}\left[\mathfrak{T} + \mathfrak{M}(2\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{IV})\right]\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[2\mathfrak{T}' - \mathfrak{T}^{IV} + \tfrac{1}{2}(2\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{IV})^2\right]H_0$$
$$+ \mathfrak{M}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 - (2\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{IV})H'_0 + H'''_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\left\{-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f\left[(m_2 - 2)U_0 + m_1 V_0 + mW_0\right]\right\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \tfrac{1}{2}\left\{cK_6 + dM_6 + bP_6 + f\left[(m_2 - 2)L_6 + m_1 N_6 + mQ_6\right]\right\} + \frac{m}{2} f\Pi_6,$$

$$\Sigma'' = \tfrac{1}{2}\left\{-cK_7 - dM_7 - bP_7 + f\left[(m_2 - 2)L_7 + m_1 N_7 + mQ_7\right]\right\}$$
$$+ \frac{m}{2} f\Pi_7,$$

$$\Sigma''' = \tfrac{1}{2}\left\{-cK_{18} - dM_{18} - bP_{18} + f\left[(m_2 - 2)L_{18} + m_1 N_{18} + mQ_{18}\right]\right\}$$
$$+ \frac{m}{2} f\Pi_{18},$$

$$\Sigma^{IV} = \tfrac{1}{2}\left\{cK_{20} + dM_{20} + bP_{20} + f\left[(m_2 - 2)L_{20} + m_1 N_{20} + mQ_{20}\right]\right\}$$
$$+ \frac{m}{2} f\Pi_{20},$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}\mathcal{L}^2\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \frac{1}{2}\left[-\mathcal{L}(\mathcal{L}^{IV} - 2\mathcal{L}') + \mathfrak{R}\right]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \left[\tfrac{1}{4}(\mathcal{L}^{IV} - 2\mathcal{L}')^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{R}^{IV} - 2\mathfrak{R}')\right]\Sigma_0$$
$$+ \mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0 - (\mathcal{L}^{IV} - 2\mathcal{L}')\Sigma''_0 + \Sigma^{IV}_0,$$

$$\Gamma' = -\frac{1}{2}\mathcal{L}\mathfrak{M}\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}\left[-\mathcal{L}(\mathfrak{M}^{IV} - 2\mathfrak{M}') + \mathfrak{M}(\mathcal{L}^{IV} - 2\mathcal{L}') + \mathcal{S}\right]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \left[\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}^{IV} - 2\mathcal{L}')(\mathfrak{M}^{IV} - 2\mathfrak{M}') - \tfrac{1}{2}(\mathcal{S}^{IV} - 2\mathcal{S}')\right]\Sigma_0$$
$$- \mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 + (\mathcal{L}^{IV} - 2\mathcal{L}')\Sigma'_0$$
$$- \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{M}^{IV} - 2\mathfrak{M}')\Sigma''_0 + \Sigma'''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right)B'_1 t^2.$$

Quatrième cas.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta - \theta')$, et l'on a $\vartheta = \Omega + \theta$.

Soient

$$H = \frac{1}{2\mu^2}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 - 1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = -\frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 - 1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H'' = \frac{1}{2}\{gK_2 + iM_2 + rP_2 + s[(m_2 - 1)L_2 + m_1 N_2 + mQ_2]\} + \frac{m}{2}sH_2,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{dH}{d\eta}\right)_0 + \frac{1}{2}(\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})H_0 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{dH'}{d\eta}\right)_0 - \frac{1}{2}(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})H'_0 + H''_0,$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2\mu}\{cX_0 + dY_0 + bZ_0 - f[(m_2 - 1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma'' = \frac{1}{2}\{cK_3 + dM_3 + bP_3 + f[(m_2 - 1)L_3 + m_1 N_3 + mQ_3]\} + \frac{m}{2}fH_3,$$

$$\Gamma = -\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\eta}\right)_0 - \frac{1}{2}(\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2 + B^2)t^3.$$

Cinquième cas.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta - \theta')$, et l'on a $\vartheta = \Omega - \theta + 2\varpi'$.

Soient

$$H = -\frac{1}{2\mu^2}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\}$$
$$-\frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = -\frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\}$$
$$-\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H'' = \tfrac{1}{2}\{-gK_4 - iM_4 - rP_4 + s[(m_2+1)L_4 + m_1N_4 + mQ_4]\} + \frac{m}{2}sH_4,$$

$$H''' = \tfrac{1}{2}\{gK_5 + iM_5 + rP_5 + s[(m_2+1)L_5 + m_1N_5 - mQ_5]\} + \frac{m}{2}sH_5.$$

$$H^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2}\{-gK_6 - iM_6 - rP_6 + s[(m_2+1)L_6 + m_1N_6 + mQ_6]\} + \frac{m}{2}sH_6.$$

$$\Phi = -\mathcal{L}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 - (\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})H'_0 + H^{\text{IV}}_0,$$

$$\Phi' = -\mathcal{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})H_0 - \mathfrak{M}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})H'_0 + H'''_0,$$

$$\Phi'' = \mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})H_0 + H''_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu^2}\{-Xc_0 - dY_0 - bZ_0 + f[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\}$$
$$+\frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2\mu}\{cX_0 + dY_0 + bZ_0 + f[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\}$$
$$-\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma'' = \tfrac{1}{2}\{cK_5 + dM_5 + bP_5 - f[(m_2+1)L_5 + m_1N_5 + mQ_5]\} - \frac{m}{2} f\Pi_5,$$

$$\Sigma''' = \tfrac{1}{2}\{cK_6 + dM_6 + bP_6 + f[(m_2+1)L_6 + m_1N_6 + mQ_6]\} + \frac{m}{2} f\Pi_6,$$

$$\Gamma = -\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\eta}\right)_0 - (\mathfrak{L}' + \mathfrak{L}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma'''_0,$$

$$\Gamma' = -\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\eta}\right)_0 - (\mathfrak{L}' + \mathfrak{L}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma'}{d\eta}\right)_0 - (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A'_1 t^2 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right) B'_1 t^2.$$

Sixième cas.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta + \theta')$, et l'on a $\vartheta = \Omega - \theta$.

Soient

$$H = \frac{1}{2\mu^2}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3} s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} s\frac{Z_0}{a},$$

$$H'' = \tfrac{1}{2}\{gK_2 + iM_2 + rP_2 + s[(m_2+1)L_2 + m_1N_2 + mQ_2]\} + \frac{m}{2} s\Pi_2,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{dH}{d\eta}\right)_0 + \frac{1}{2}(\mathfrak{L}' + \mathfrak{L}^{\text{IV}})H_0 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{dH'}{d\eta}\right)_0 - \frac{1}{2}(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})H'_0 + H''_0,$$

$$\Sigma' = -\frac{1}{2\mu}\{cX_0 + dY_0 + bZ_0 - f[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma'' = \tfrac{1}{2}\{cK_3 + dM_3 + bP_3 + f[(m_2+1)L_3 + m_1N_3 + mQ_3]\} + \frac{m}{2} f\Pi_3,$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\eta}\right)_0 + \frac{1}{2}(\mathfrak{L}' + \mathfrak{L}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2 + B^2)t^3.$$

Septième cas.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta + 5')$, et l'on a $\vartheta = \Omega + 5 - 2\varpi'$.

Soient

$$H = -\frac{1}{2\mu^2}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 - 1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 - 1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H'' = \tfrac{1}{2}\{gK_4 + iM_4 + rP_4 - s[(m_2 - 1)L_4 + m_1N_4 + mQ_4]\} - \frac{m}{2}sH_4,$$

$$H''' = \tfrac{1}{2}\{gK_5 + iM_5 + rP_5 + s[(m_2 - 1)L_5 + m_1N_5 + mQ_5]\} + \frac{m}{2}sH_5,$$

$$H^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2}\{gK_6 + iM_3 + rP_6 - s[(m_2 - 1)L_6 + m_1N_6 + mQ_6]\} - \frac{m}{2}sH_6,$$

$$\Phi = -\mathfrak{L}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{\text{IV}})H'_0 + H^{\text{IV}}_0,$$

$$\Phi' = -\mathfrak{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{\text{IV}})H_0 - \mathfrak{M}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})H'_0 + H'''_0,$$

$$\Phi'' = \mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})H_0 + H''_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu^2}\{cX_0 + dY_0 + bZ_0 - f[(m_2 - 1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2\mu}\{cX_0 + dY_0 + bZ_0 - f[(m_2 - 1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma'' = -\tfrac{1}{2}\{cK_5 + dM_5 + bP_5 - f[(m_2 - 1)L_5 + m_1 N_5 + mQ_5]\} + \frac{m}{2} f H_5,$$

$$\Sigma''' = \tfrac{1}{2}\{cK_6 + dM_6 + bP_6 + f[(m_2 - 1)L_6 + m_1 N_6 + mQ_6]\} + \frac{m}{2} f H_6.$$

$$\Gamma = -\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\eta}\right)_0 - (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma'''_0,$$

$$\Gamma' = -\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\eta}\right)_0 - (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma'}{d\eta}\right)_0 - (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right)B'_1 t^2.$$

Huitième cas.

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi + \vartheta')$, dans R_2 le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Psi + \vartheta$.

Soient

$$H = -\frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 - 1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\}$$
$$- \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} s \frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \tfrac{1}{2}\{gK_6 + iM_6 + rP_6 - s[(m_2 - 1)L_6 + m_1 N_6 + mQ_6]\} - \frac{m}{2} s H_6,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\eta}\right)_0 - \frac{1}{2}(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})H_0 + H'_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\{-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f[(m_2 - 1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} f \frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \tfrac{1}{2}\{-cK_7 - dM_7 - bP_7 + f[(m_2 - 1)L_7 + m_1 N_7 + mQ_7]\} + \frac{m}{2} f H_7.$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\eta}\right)_0 + \frac{1}{2}(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \Sigma'_0.$$

La partie non périodique de $\partial_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\partial_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2 + B^2)\,t^3.$$

Neuvième cas

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi + \theta')$, dans R_2 le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos \mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Psi - \theta + 2\varpi'$.

Soient

$$H = -\frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = -gK_5 - iM_5 - rP_5 + s[(m_2+1)L_5 + m_1N_5 + mQ_5] + ms\Pi_5,$$

$$H'' = -gK_8 - iM_8 - rP_8 - s[(m_2+1)L_8 + m_1N_8 + mQ_8] - ms\Pi_8,$$

$$\Phi = -\mathcal{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})H_0 + H''_0,$$

$$\Phi' = -\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})H_0 + H'_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\{-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = -cK_5 - dM_5 - bP_5 - f[(m_2+1)L_5 + m_1N_5 + mQ_5] - mf\Pi_5,$$

$$\Sigma'' = cK_8 + dM_8 + bP_8 - f[(m_2+1)L_8 + m_1N_8 + mQ_8] - mf\Pi_8,$$

$$\Gamma = \mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + (\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \Sigma''_0,$$

$$\Gamma' = -\mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \Sigma'_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A'_1 t^3 + \frac{1}{2}\Gamma' B'_1 t^2.$$

Dixième cas.

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi - \theta')$, dans R_2 le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos \mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Psi - \theta$.

Soient

$$H = \frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2+1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \frac{1}{2}\{-gK_5 - iM_5 - rP_5 + s[(m_2+1)L_5 + m_1 N_5 + mQ_5]\} + \frac{m}{2}sH_5,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{iv}})H_0 + H'_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\{-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f[(m_2+1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2}\{cK_8 + dM_8 + bP_8 - f[(m_2+1)L_8 + m_1 N_8 + mQ_8]\} - \frac{m}{2}fH_8,$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}(\mathfrak{L}' + \mathfrak{L}^{\text{iv}})\Sigma_0 + \Sigma'_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2 + B^2)t^3.$$

Onzième cas.

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi - \theta')$, dans R_2 le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos \mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Psi + \theta - 2\varpi'$.

Soient

$$H = \frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 - 1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = gK_6 + iM_6 + rP_6 - s[(m_2 - 1)L_6 + m_1N_6 + mQ_6] - msH_6,$$

$$H'' = -gK_7 - iM_7 - rP_7 - s[(m_2 - 1)L_7 + m_1N_7 + mQ_7] - msH_7,$$

$$\Phi = -\mathfrak{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{IV})H_0 + H''_0,$$

$$\Phi' = -\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{IV})H_0 + H'_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\{-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f[(m_2 - 1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = -cK_6 - dM_6 - bP_6 - f[(m_2 - 1)L_6 + m_1N_6 + mQ_6] - mfH_6,$$

$$\Sigma'' = -cK_7 - dM_7 - bP_7 + f[(m_2 - 1)L_7 + m_1N_7 + mQ_7] + mfH_7,$$

$$\Gamma = \mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{IV})\Sigma_0 + \Sigma''_0,$$

$$\Gamma' = -\mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{IV})\Sigma_0 + \Sigma'_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A'_1 t^3 + \frac{1}{2}\Gamma' B'_1 t^2.$$

Douzième cas.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'^2\cos(b - 2\theta')$, et l'on a $b = \Omega + 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{\mu}[g_0X_0 + i_0Y_0 + r_0Z_0 + s_0(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi' = \frac{2}{\mu^2}[g_0X_0 + i_0Y_0 + r_0Z_0 + s_0(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)] + 6m\frac{n}{\mu}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi'' = -\frac{2}{\mu^3}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$-9m\frac{n}{\mu^4} s_0 \frac{Z_0}{n},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$+\frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{2}{\mu^2}[c_0 X_0 + d_0 Y_0 + b_0 Z_0 - f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$-6m\frac{n}{\mu^3} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right)B'_1 t^2.$$

Treizième cas.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'^2\cos(b + 2\theta')$, et l'on a $b = \Omega - 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = -\frac{1}{\mu}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$-\frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi' = \frac{2}{\mu^2}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + 6m\frac{n}{\mu^3} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi'' = \frac{2}{\mu^3}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + 9m\frac{n}{\mu^4} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$+\frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{2}{\mu^2}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$+6m\frac{n}{\mu^3} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right) B'_1 t^2.$$

Quatorzième cas.

On prend dans R le terme $T\gamma'^2 \cos(\psi + 2\theta')$, dans R_2 le terme $(C + \bar{C}\gamma'^2)\cos \mathcal{A}$, et on a $\mathcal{A} = \psi + 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{\mu}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}f_0\frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \frac{1}{3}\Gamma A'_1 t^3.$$

Quinzième cas.

On prend dans R le terme $T\gamma'^2 \cos(\psi - 2\theta')$, dans R_2 le terme $(C + \bar{C}\gamma'^2)\cos \mathcal{A}$, et on a $\mathcal{A} = \psi - 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = -\frac{1}{\mu}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}s_0\frac{Z_0}{a};$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}f_0\frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \frac{1}{3}\Gamma A'_1 t^3.$$

Seizième cas.

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi+\theta')$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta+\theta')$, et on a $\vartheta=\Psi$.

Soient

$$\Phi=\frac{1}{2\mu^2}[g_0X_0+i_0Y_0+r_0Z_0+s_0(m_2U_0+m_1V_0+mW_0)]+\frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma=\frac{1}{2\mu}[-c_0X_0-d_0Y_0-b_0Z_0+f_0(m_2U_0+m_1V_0+mW_0)]+\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f_0\frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l=\left(\frac{1}{6}\Phi+\frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2+B^2)t^3.$$

Dix-septième cas.

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi-\theta')$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta-\theta')$, et on a $\vartheta=\Psi$.

Soient

$$\Phi=\frac{1}{2\mu^2}[g_0X_0+i_0Y_0+r_0Z_0+s_0(m_2U_0+m_1V_0+mW_0)]+\frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma=\frac{1}{2\mu}[-c_0X_0-d_0Y_0-b_0Z_0+f_0(m_2U_0+m_1V_0+mW_0)]+\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f_0\frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l=\left(\frac{1}{6}\Phi+\frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2+B^2)t^3.$$

Dix-huitième cas.

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi+\theta')$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta-\theta')$, et on a $\vartheta=\Psi+2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{\mu}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}s_0\frac{Z_0}{a};$$

$$\Phi' = \frac{1}{\mu^2}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + 3m\frac{n}{\mu^3}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}f_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{1}{\mu^2}[c_0 X_0 + d_0 Y_0 + b_0 Z_0 - f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] - 3m\frac{n}{\mu^3}f_0\frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A'_1 t^3 + \frac{1}{2}\Gamma' B'_1 t^2.$$

Dix-neuvième cas.

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi - \theta')$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta + \theta')$, et on a $\vartheta = \Psi - 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = -\frac{1}{\mu}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi' = \frac{1}{\mu^2}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + 3m\frac{n}{\mu^3}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}f_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{1}{\mu^2}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + 3m\frac{n}{\mu^3}f_0\frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A'_1 t^3 + \frac{1}{2}\Gamma' B'_1 t^2.$$

Avant d'appliquer ces formules aux diverses combinaisons que comprennent les dix-neuf cas, faisons encore quelques remarques propres à simplifier l'écriture des résultats. Posons $\frac{n'}{n} = \alpha$; α sera une grandeur comparable aux quantités e, e', γ, $\sqrt{\frac{a}{a'}}$, et nous la regarderons comme étant aussi du premier degré. Ajoutons que le rapport $\frac{M}{m'}$ de la masse de la Terre à la masse du Soleil doit être considéré comme une quantité du quatrième degré; c'est ce qu'on peut exprimer en posant $\varepsilon = 1 - \omega^4$, ω étant du premier degré. Observons enfin que les parties cherchées de $\delta_2 l$, renfermant en facteur l'une des trois quantités $A^2 + B^2$, A'_1, B'_1, sont du second ordre, et qu'ainsi dans les valeurs de h_0, h^0, j^0, k^0 qui doivent y être substituées, on peut négliger les quantités du second ordre; nous pouvons donc écrire (*voir* pages 33, 34 et 35)

$$h_0 = h^0 = -\tfrac{3}{4} n\alpha^2[1 + (2)], \quad j^0 = \tfrac{3}{4} n\alpha^2[1 + (2)], \quad k^0 = - n\alpha^2[1 + (2)].$$

On voit aisément d'après cela que les diverses parties non périodiques de $\delta_2 l$ se présenteront sous l'une des quatre formes

$$n'^2 G B'_1 t^4, \quad n' G'(A^2 + B^2) t^3, \quad n' G'' A'_1 t^3, \quad G''' B'_1 t^4,$$

G, G', G'', G''' désignant des polynômes à coefficients numériques ordonnés suivant les puissances de γ_0, e, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$, ω : on reconnaît de plus que le degré d'approximation avec lequel nous avons calculé chaque terme du développement de R permet d'obtenir dans G les termes du cinquième degré, dans G' et dans G'' ceux du quatrième, dans G''' ceux du troisième.

Il sera donc inutile d'avoir égard aux combinaisons qui fourniraient dans $\delta_2 l$ des parties non périodiques où les polynômes G, G', G'', G''' auraient tous leurs termes de degrés supérieurs respectivement aux nombres 5, 4, 4, 3. Ces combinaisons, qui ne donneraient que des termes négligeables, étant mises de côté, il nous en restera 160, et nous allons transcrire pour chacune de ces dernières la partie non périodique correspondante de $\delta_2 l$.

DÉSIGNATION de la combinaison.	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$.
1, 1	$+\left(\frac{1191}{2}\alpha^2+\frac{1005}{16}\alpha^3\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
5, 5	$+\frac{19}{2}\alpha^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
8, 8	$+\left(-\frac{513}{8}\alpha^2-\frac{675}{4}\alpha^3\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
9, 9	$+\left(\frac{19}{8}\alpha^2+\frac{25}{12}\alpha^3\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
31, 31	$+\frac{825}{16}\alpha e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
33, 33	$-\frac{45}{32}\alpha^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
34, 34	$+\left(-\frac{9}{8}\alpha+\frac{567}{2048}\alpha^3+18\alpha\gamma_0^2-\frac{51}{16}\alpha e^2+\frac{45}{8}\alpha e'^2\right)n'\alpha(A^2+B^2)t$
94, 94	$-\frac{9}{16}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t$
95, 95	$-\frac{147}{16}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
1, 213	$+\left(-\frac{405}{64}-\frac{81}{8}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ $+\left(\frac{135}{4}+54\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t$ $+\left(\frac{135}{2}+108\alpha\right).e'^2B'_1t^2$
4, 94	$-\frac{27}{8}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1t^3$ $-\frac{27}{2}\alpha.e'^2B'_1t^2$
6, 91	$+\left(\frac{135}{64}+\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ $+\left(-\frac{45}{4}-9\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t$ $+\left(-\frac{45}{2}-18\alpha\right).e'^2B'_1t^2$
22, 34	$+\frac{81}{16}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1t^3$ $+\frac{81}{4}\alpha.e'^2B'_1t^2$

DÉSIGNATION de la combinaison.	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$.
23, 221	$+\left(\frac{9}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ $+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3$ $+(-3+3\alpha).e'^2B'_1t^4$
27, 215	$+\left(-\frac{243}{64}-\frac{243}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ $+\left(\frac{81}{4}+\frac{81}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3$ $+\left(\frac{81}{2}+\frac{81}{2}\alpha\right).e'^2B'_1t^2$
29, 217	$+\left(\frac{27}{64}+\frac{9}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ $+\left(-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3$ $+\left(-\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right).e'^2B'_1t^2$
75, 96	$+\left(-\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ $+\left(\frac{9}{2}-9\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3$ $+(9-18\alpha).e'^2B'_1t^2$
97, 76	$+\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ $+\left(\frac{9}{2}+9\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t$ $+(9+18\alpha).e'^2B'_1t^2$
223, 24	$+\left(\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ $+\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3$ $+(-3-3\alpha).e'^2B'_1t^2$
24, 223	$+\left(-\frac{9}{2}-\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ $+\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3$ $+(3+3\alpha).e'^2B'_1t^2$

DÉSIGNATION de la combinaison.	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$.
34, 22	$\begin{cases} +\frac{81}{16}\alpha . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\frac{81}{4}\alpha . e'^2 B'_1 t^2 \end{cases}$
76, 97	$\begin{cases} +\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right) n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{9}{2}-9\alpha\right) . n'\alpha e'^2 A'_1 t \\ +(-9-18\alpha) . e'^2 B'_1 t^2 \end{cases}$
91, 6	$\begin{cases} +\left(-\frac{135}{64}-\frac{27}{16}\alpha\right) . n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{45}{4}+9\alpha\right) . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(\frac{45}{2}+18\alpha\right) . e'^2 B'_1 t^2 \end{cases}$
94, 4	$\begin{cases} -\frac{27}{8}\alpha . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ -\frac{27}{2}\alpha . e'^2 B'_1 t^2 \end{cases}$
96, 75	$\begin{cases} +\left(\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right) . n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{9}{2}+9\alpha\right) . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +(-9+18\alpha) . e'^2 B'_1 t^2 \end{cases}$
213, 1	$\begin{cases} +\left(\frac{405}{64}+\frac{81}{8}\alpha\right) . n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{135}{4}-54\alpha\right) . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(-\frac{135}{2}-108\alpha\right) . e'^2 B'_1 t^2 \end{cases}$
215, 27	$\begin{cases} +\left(\frac{243}{64}+\frac{243}{64}\alpha\right) . n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{81}{4}-\frac{81}{4}\alpha\right) . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(-\frac{81}{2}-\frac{81}{2}\alpha\right) . e'^2 B'_1 t^2 \end{cases}$

DÉSIGNATION de la combinaison	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$.
217, 29	$+\left(-\frac{27}{64}-\frac{9}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3$
	$+\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$
	$+\left(\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right).e'^2 B'_1 t^2$
221, 23	$+\left(-\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3$
	$+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$
	$+(3-3\alpha).e'^2 B'_1 t^2$
4, 41	$-\frac{81}{16}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
5, 43	$+\left(-1-5\alpha^2+14\gamma_0^2-\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
23, 115	$+\left(-\frac{9}{4}e'^2+\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n\alpha(A^2+B^2)t^3$
24, 116	$+\left(-\frac{9}{4}e'^2-\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
25, 119	$-\frac{1}{4}e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
31, 111	$-\frac{225}{8}\alpha e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
33, 12	$+\left(\frac{3}{2}+\frac{21}{8}\alpha^2+24\gamma_0^2-\frac{39}{4}e^2+\frac{9}{4}e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
34, 13	$+\left(\frac{9}{8}\alpha-\frac{27}{256}\alpha^2-\frac{405}{2048}\alpha^3\right.$
	$\left.-\frac{117}{8}\alpha\gamma_0^2+\frac{51}{16}\alpha e^2-\frac{45}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
90, 45	$+\left(\frac{27}{8}e'^2-\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
91, 46	$+\left(\frac{27}{8}e'^2+\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
92, 47	$+\left(\frac{27}{2}e^2-54\gamma_0^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
93, 48	$+\left(\frac{3}{2}e^2+6\gamma_2^0\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$

DÉSIGNATION de la combinaison.	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$.
94, 49	$+\frac{9}{16}\alpha e'^2 . n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
95, 50	$+\frac{147}{16}\alpha e'^2 . n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
96, 51	$+\left(\frac{3}{2}e^2+6\gamma_0^2-3\alpha e^2-12\alpha\gamma_0^2\right). n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
1, 122	$\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{243}{16}+\frac{729}{32}\alpha\right). n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^2 \\ +\left(-\frac{81}{2}-\frac{243}{4}\alpha\right). n'\alpha e'^2 A'_1 t \end{array}\right.$
4, 49	$\left\{\begin{array}{l} +\frac{27}{8}\alpha . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\frac{27}{4}\alpha . e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$
6, 46	$\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{81}{16}-\frac{243}{64}\alpha\right). n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{27}{2}+\frac{81}{8}\alpha\right). n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{array}\right.$
8, 273	$\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{729}{32}-\frac{729}{16}\alpha\right). n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{243}{4}+\frac{243}{2}\alpha\right). n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{array}\right.$
9, 275	$\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{81}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right). n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{27}{4}-\frac{9}{2}\alpha\right). n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{array}\right.$
22, 13	$\left\{\begin{array}{l} -\frac{81}{16}\alpha . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ -\frac{81}{8}\alpha . e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$
23, 130	$\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{9}{16}+\frac{9}{16}\alpha\right). n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right). n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{array}\right.$
27, 124	$\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{243}{32}+\frac{243}{32}\alpha\right). n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{81}{4}-\frac{81}{4}\alpha\right). n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{array}\right.$

DÉSIGNATION de la combinaison.	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$.
29, 126	$+\left(-\frac{27}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ $+\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3$
75, 51	$+\left(\frac{27}{16}-\frac{27}{8}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ $+\left(-\frac{9}{2}+9\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3$
1, 10	$+\left(9+\frac{27}{2}\alpha+\frac{123}{16}\alpha^2-27\gamma_0^2-\frac{225}{4}e^2-\frac{117}{2}e'^2\right.$ $\left.+\frac{213}{16}\alpha^3-45\alpha\gamma_0^2-\frac{351}{4}\alpha e^2-\frac{351}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
4, 42	$+\frac{81}{16}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
5, 44	$+\left(1-\frac{3}{2}\alpha^2-14\gamma_0^2-\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
6, 37	$+\left(\frac{9}{4}e'^2+\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
7, 38	$+\left(\frac{441}{4}e'^2+\frac{3969}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
8, 39	$+\left(-\frac{27}{2}-27\alpha-\frac{27}{2}\alpha^2+54\gamma_0^2+90e^2+\frac{351}{4}e'^2\right.$ $\left.+\frac{27}{4}\alpha^3+108\alpha\gamma_0^2+\frac{441}{2}\alpha e^2+\frac{351}{2}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
9, 40	$+\left(\frac{3}{2}+\alpha+\frac{11}{12}\alpha^2-6\gamma_0^2-6e^2-\frac{39}{4}e'^2+\frac{49}{36}\alpha^3\right.$ $\left.-4\alpha\gamma_0^2+\frac{1}{2}\alpha e^2-\frac{13}{2}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
23, 117	$+\left(\frac{9}{4}e'^2-\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
24, 118	$+\left(\frac{9}{4}e'^2+\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
25, 120	$+\frac{1}{4}e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
27, 107	$+\left(-\frac{27}{8}e'^2-\frac{27}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
28, 108	$+\left(-\frac{1323}{8}e'^2-\frac{3969}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$

DÉSIGNATION de la combinaison.	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$.
29, 109	$+\left(\frac{3}{8}e'^2+\frac{1}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$
30, 110	$+\left(\frac{147}{8}e'^2+\frac{147}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$
32, 112	$+(6e^2+3\alpha e^2).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
33, 136	$+9\gamma_0^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
97, 52	$+\left(\frac{3}{2}e^2-6\gamma_0^2+3\alpha e^2-12\alpha\gamma_0^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^2$
24, 132	$\left\{\begin{array}{l}+\left(\frac{9}{16}+\frac{9}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\+\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\end{array}\right.$
34, 114	$\left\{\begin{array}{l}-\frac{81}{16}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1t^3\\-\frac{81}{8}\alpha.e'^2B'_1t^2\end{array}\right.$
76, 52	$\left\{\begin{array}{l}+\left(-\frac{27}{16}-\frac{27}{8}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\+\left(\frac{9}{2}+9\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\end{array}\right.$
91, 37	$\left\{\begin{array}{l}+\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\+\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{8}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\end{array}\right.$
94, 42	$\left\{\begin{array}{l}+\frac{27}{8}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1t^3\\+\frac{27}{4}\alpha.e'^2B'_1t^2\end{array}\right.$
213, 10	$\left\{\begin{array}{l}+\left(\frac{81}{32}+\frac{81}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\+\left(-\frac{27}{4}-\frac{27}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\end{array}\right.$
10, 1	$+\left(9-\frac{27}{2}\alpha-\frac{693}{16}\alpha^2+27\gamma_0^2+\frac{225}{4}e^2+\frac{117}{2}e'^2\right.$ $\left.-\frac{297}{4}\alpha^3+45\alpha\gamma_0^2+\frac{351}{4}\alpha e^2+\frac{351}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$

DÉSIGNATION de la combinaison.		PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$.
37,	6	$+\left(-\frac{9}{4}e'^2-\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
38,	7	$+\left(-\frac{441}{4}e'^2-\frac{3969}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
39,	8	$+\left(\frac{27}{2}+27\alpha+\frac{621}{8}\alpha^2-54\gamma_0^2-90e^2-\frac{351}{4}e'^2\right.$ $\left.+162\alpha^3-108\alpha\gamma_0^2-\frac{441}{2}\alpha e^2-\frac{351}{2}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
40,	9	$+\left(-\frac{3}{2}-\alpha-\frac{79}{24}\alpha^2+6\gamma_0^2+6e^2+\frac{39}{4}e'^2\right.$ $\left.-\frac{31}{9}\alpha^3+4\alpha\gamma_0^2-\frac{1}{2}\alpha e^2+\frac{13}{2}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$
42,	4	$+\frac{189}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
44,	5	$+\left(-1-\frac{13}{4}\alpha^2+14\gamma_0^2+\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
52,	97	$+\left(6\gamma_0^2-\frac{3}{2}e^2+12\alpha\gamma_0^2-3\alpha e^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
107,	27	$+\left(\frac{27}{8}e'^2+\frac{27}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$
108,	28	$+\left(\frac{1323}{8}e'^2+\frac{3969}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$
109,	29	$+\left(-\frac{3}{8}e'^2-\frac{1}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$
110,	30	$+\left(-\frac{147}{8}e'^2-\frac{147}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$
112,	32	$+(-6e^2-3\alpha e^2).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
117,	23	$+\left(-\frac{9}{4}e'^2+\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
118,	24	$+\left(-\frac{9}{4}e'^2-\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
120,	25	$-\frac{1}{4}e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
136,	33	$-9\gamma_0^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$

DÉSIGNATION de la combinaison.	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$.
10, 213	$+\left(-\frac{81}{32}-\frac{81}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1 t$ $+\left(\frac{27}{4}+\frac{27}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1 t$
37, 91	$+\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1 t^2$ $+\left(-\frac{9}{4}-\frac{9}{8}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1 t$
42, 94	$+\frac{63}{16}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1 t^3$ $+\frac{63}{8}\alpha.e'^2B'_1 t^2$
52, 76	$+\left(\frac{27}{16}+\frac{27}{8}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1 t^2$ $+\left(-\frac{9}{2}-9\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1 t^3$
114, 34	$-\frac{189}{32}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1 t^3$ $-\frac{189}{16}\alpha.e'^2B'_1 t^2$
132, 24	$+\left(-\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1 t^2$ $+\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1 t^3$
12, 33	$+\left(-\frac{3}{2}+\frac{15}{16}\alpha^2-24\gamma_0^2+\frac{39}{4}e^2-\frac{9}{4}e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$
13, 34	$+\left(\frac{21}{16}\alpha-\frac{189}{512}\alpha^2+\frac{189}{4096}\alpha^3-\frac{117}{8}\alpha\gamma_0^2+\frac{63}{16}\alpha e^2-\frac{105}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$
41, 4	$-\frac{189}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
43, 5	$+\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2-14\gamma_0^2+\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
45, 90	$+\left(-\frac{27}{8}e'^2+\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$
46, 91	$+\left(-\frac{27}{8}e'^2-\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$

DÉSIGNATION de la combinaison.	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$.
47, 92	$+\left(54\gamma_0^2 - \frac{27}{2}e^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
48, 93	$+\left(-6\gamma_0^2 - \frac{3}{2}e^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
49, 94	$+\frac{21}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
50, 95	$+\frac{343}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
51, 96	$+\left(-\frac{3}{2}e^2 - 6\gamma_0^2 + 3\alpha e^2 + 12\alpha\gamma_0^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
111, 31	$-\frac{375}{16}\alpha e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
115, 23	$+\left(\frac{9}{4}e'^2 - \frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
116, 24	$+\left(\frac{9}{4}e'^2 + \frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
119, 25	$+\frac{1}{4}e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
13, 22	$\left\{\begin{array}{l} -\frac{189}{32}\alpha.n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ -\frac{189}{16}\alpha.e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$
46, 6	$\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{81}{16} + \frac{243}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3 \\ +\left(-\frac{27}{2} - \frac{81}{8}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{array}\right.$
49, 4	$\left\{\begin{array}{l} +\frac{63}{16}\alpha.n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\frac{63}{8}\alpha.e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$
51, 75	$\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{27}{16} + \frac{27}{8}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3 \\ +\left(\frac{9}{2} - 9\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{array}\right.$
122, 1	$\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{243}{16} - \frac{729}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3 \\ +\left(\frac{81}{2} + \frac{243}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{array}\right.$

DÉSIGNATION de la combinaison.	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE δt.
124, 27	$+\left(-\frac{243}{32}-\frac{243}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t$
	$+\left(\frac{81}{4}+\frac{81}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2\mathrm{A}'_1 t^3$
126, 29	$+\left(\frac{27}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t^4$
	$+\left(-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2\mathrm{A}'_1 t^3$
130, 23	$+\left(\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t^4$
	$+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2\mathrm{A}'_1 t^3$
273. 8	$+\left(\frac{729}{32}+\frac{729}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t^4$
	$+\left(-\frac{243}{4}-\frac{243}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2\mathrm{A}'_1 t^3$
275. 9	$+\left(-\frac{81}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t$
	$+\left(\frac{27}{4}+\frac{9}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2\mathrm{A}'_1 t^3$
1. 57	$+\left(-\frac{567}{64}-\frac{405}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t^4$
6, 15	$+\left(\frac{189}{64}+\frac{135}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t^4$
8, 159	$+\left(\frac{729}{64}+\frac{729}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t^4$
9, 161	$+\left(-\frac{81}{64}-\frac{27}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t^4$
23, 65	$+\left(\frac{9}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t^4$
27, 59	$+\left(-\frac{243}{64}-\frac{243}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t^4$
29, 61	$+\left(\frac{27}{64}+\frac{9}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t^4$
75, 20	$+\left(-\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1 t^4$

DÉSIGNATION de la combinaison.	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$.
24, 67	$+\left(-\frac{9}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
76, 21	$+\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
21, 76	$+\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
67, 24	$+\left(\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
15, 6	$+\left(-\frac{189}{64}-\frac{135}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
20, 75	$+\left(\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
57, 1	$+\left(\frac{567}{64}+\frac{405}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
59, 27	$+\left(\frac{243}{64}+\frac{243}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
61, 29	$+\left(-\frac{27}{64}-\frac{9}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
65, 23	$+\left(-\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
159, 8	$+\left(-\frac{729}{64}-\frac{729}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
161, 9	$+\left(\frac{81}{64}+\frac{27}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
10, 10	$+\left(-\frac{15}{8}\alpha^2-\frac{39}{16}\alpha^3\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
42, 42	$-\frac{189}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
12, 12	$-\frac{15}{8}\alpha^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
13, 13	$+\left(-\frac{21}{16}\alpha+\frac{63}{128}\alpha^2-\frac{189}{1024}\alpha^3+\frac{45}{4}\alpha\gamma_0^2-\frac{63}{16}\alpha e^2+\frac{105}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t$
41, 41	$+\frac{189}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$

DÉSIGNATION de la combinaison.	PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE δl.
49, 49	$-\frac{21}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
50, 50	$-\frac{343}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$
10, 122	$+\left(\frac{81}{32}+\frac{81}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
37, 46	$+\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
42, 49	$-\frac{63}{16}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1t^3$
114, 13	$+\frac{189}{32}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1t^3$
13, 114	$+\frac{189}{32}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1t^3$
46, 37	$+\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
49, 42	$-\frac{63}{16}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1t^3$
122, 10	$+\left(-\frac{81}{32}-\frac{81}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$

Si l'on rassemble dans ce tableau toutes les parties qui contiennent le facteur B'_1t^4, on trouve qu'elles se détruisent deux à deux : le terme en t^4 dans $\delta_2 l$ est donc nul, ou du moins il est le produit de $n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ par un facteur qui est au moins du second degré. Cela suffit pour conclure que ce terme est négligeable dans les limites des temps historiques.

On trouve également une somme nulle en additionnant toutes les parties du tableau précédent qui contiennent A'_1t^3 : le terme de $\delta_2 l$ qui renferme A'_1t^3 en facteur est donc nul, ou du moins il est le produit de $n'\alpha e'^2A'_1t^3$ par un facteur qui est au moins du second degré. On conclut de là que ce terme est encore négligeable.

Les parties qui renferment le facteur $(A^2+B^2)t^3$ ne se détruisent pas complétement; leur somme est $\left(\frac{7067}{1536}-\frac{2547}{4096}\alpha\right).n'\alpha^3(A^2+B^2)t^3$.

Enfin la somme des parties où se trouve le facteur $B'_1 t^2$ est $-\frac{9}{8}\alpha e'^2 B'_1 t^2$.

Ainsi le déplacement du plan de l'écliptique introduit dans la longitude moyenne de la Lune la partie non périodique et non proportionnelle au temps

$$\delta_2 l = \left(\frac{7067}{1536} - \frac{2547}{4096}\alpha\right) . n'\alpha^3 (A^2 + B^2) t^3 - \frac{9}{8}\alpha e'^2 B'_1 t^2.$$

La réduction en nombres montre que le coefficient $-\frac{9}{8}\alpha e'^2 B'_1$ de t^2 est inférieur à $0'',000\,000\,02$; le terme en t^2 est donc insensible. Il nous reste par conséquent, en réduisant en nombre le coefficient de t^3,

$$\delta_2 l = +\ 0'',00328\, t^3.$$

Si l'on réunit ce terme en t^3 au terme ct^2 que la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre introduit dans la longitude moyenne de la Lune, la somme pourra s'écrire $(c + 0'',00328\, t) t^2$. Il en résulte que pour une époque $t = -25$ antérieure de vingt-cinq siècles à l'époque actuelle, le déplacement de l'écliptique a pour effet de diminuer de $0'',08$ seulement le coefficient de l'accélération séculaire.

Les anciennes éclipses paraissent exiger au contraire que ce coefficient soit accru de 4 à 6 secondes : ainsi, comme nous l'avons annoncé, ce n'est pas dans le fait du déplacement du plan de l'orbite terrestre qu'on peut trouver l'explication du désaccord qui semble exister sur ce point entre la théorie et l'observation.

Cette conclusion ne pouvait résulter d'ailleurs que du calcul de l'ensemble des termes que nous avons déterminés ci-dessus; car, parmi ces termes, il y en a plusieurs qui, pris isolément, modifieraient beaucoup l'accélération du mouvement de la Lune. Par exemple, les deux termes en t^4 égaux et de signes contraires que fournissent les combinaisons 8, 273 et 273, 8 ont pour valeur numérique $\pm 0'',0128\, t^4$; si l'un d'eux existait seul, il augmenterait ou diminuerait de 8 secondes le coefficient de l'accélération applicable à l'époque $t = -25$. Ainsi encore, les combinaisons 8, 39 et 39, 8 donnent des termes en t^4 qui, pris séparément, altéreraient ce coefficient, l'un de $+ 50''$, l'autre de $- 51''$, tandis que, réunis, ils le diminueraient de 1 seconde seule-

ment. Il était donc nécessaire de s'assurer, comme nous l'avons fait, que ces différents termes se détruisent à très-peu près.

Nota. Pour la réduction en nombre des formules de ce Mémoire, on a fait usage des valeurs suivantes :

$$e = 0,054\,908, \qquad \gamma = \sin 9264'', \qquad e' = 0,01677,$$

$$\varpi' = 280^\circ 21' 40'', \qquad \text{A} = +2'',944, \qquad \text{B} = -23'',783,$$

$$\frac{n'}{100} = 1\,295\,977'', \qquad \frac{n'}{n} = \alpha = 0,07439.$$

Sur la généralisation du premier et du second potentiel;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Dans un Mémoire inséré dans le volume précédent de ce Journal, j'ai étudié la solution générale de l'équation $\Delta\Delta u = 0$, dans laquelle le signe Δu représente

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2},$$

et j'ai montré comment cette solution dépendait du premier et du second potentiel.

Le premier et le second potentiel par rapport à un point (x, y, z) d'une masse renfermée sous un volume Π sont donnés par les formules

$$(1) \qquad v = \int\int\int \frac{\varphi(a, b, c)}{r} da\,db\,dc,$$

$$(2) \qquad w = \int\int\int r\varphi(a, b, c)\, da\,db\,dc,$$

où r a pour valeur

$$(3) \qquad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

les intégrales triples s'étendent à tous les éléments $da\,db\,dc$ du volume Π, et $\varphi(a, b, c)$ est la densité de la masse au point (a, b, c).

Après la publication de l'extrait de mon Mémoire dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, M. de Saint-Venant me fit observer que si l'on prend encore pour v et w les expressions (1) et (2), mais en adoptant pour r l'expression plus générale où A, B, C sont positifs

$$(4) \qquad r = \sqrt{\frac{(x-a)^2}{A} + \frac{(y-b)^2}{B} + \frac{(z-c)^2}{C}}.$$

v satisfait à l'équation

$$(5)\qquad A\frac{d^2v}{dx^2}+B\frac{d^2v}{dy^2}+C\frac{d^2v}{dz^2}=0,$$

et w à cette autre

$$(6)\quad A^2\frac{d^4w}{dx^4}+B^2\frac{d^4w}{dy^4}+C^2\frac{d^4w}{dz^4}+2BC\frac{d^4w}{dy^2dz^2}+2CA\frac{d^4w}{dz^2dx^2}+2AB\frac{d^4w}{dx^2dy^2}=0$$

M. de Saint-Venant m'ayant engagé à examiner comment les propriétés des deux potentiels se généralisaient quand on substitue dans les formules (1) et (2) l'expression (4) au lieu de (3), j'ai été conduit à écrire la Note actuelle.

Suivant M. de Saint-Venant, la plupart des corps employés dans les arts ne peuvent être regardés comme isotropes; mais dans l'équilibre d'élasticité de ces corps les projections des déplacements moléculaires satisfont sensiblement à l'équation (6). (*Voyez* ce Journal, année 1863, p. 371.)

Nous allons reprendre rapidement les questions dans l'ordre où elles se présentent dans notre précédent Mémoire, en nous arrêtant seulement aux points qui exigent des modifications de quelque importance.

Du premier potentiel et de l'équilibre de température.

1. Le potentiel v généralisé d'une masse quelconque satisfait en dehors de cette masse à l'équation (5), que nous représenterons, pour abréger, par

$$\delta v=0;$$

on sait aussi que, si l'on choisit convenablement les axes de coordonnées, la température d'équilibre d'un corps cristallisé satisfait à une équation de cette forme.

Désignons par $d\varpi$ l'élément de volume d'un corps et par $d\sigma$ l'élément de la surface σ qui le termine; si v et w sont deux fonctions continues quelconques de x, y, z, on a facilement en intégrant par

partie la première des trois équations suivantes, et les deux autres s'en déduisent par analogie :

$$\int v \frac{d^2 w}{dx^2} d\varpi = \int v \frac{dw}{dx} \cos\xi \, d\sigma - \int \frac{dv}{dx} \frac{dw}{dx} d\varpi,$$

$$\int v \frac{d^2 w}{dy^2} d\varpi = \int v \frac{dw}{dy} \cos\eta \, d\sigma - \int \frac{dv}{dy} \frac{dw}{dy} d\varpi,$$

$$\int v \frac{d^2 w}{dz^2} d\varpi = \int v \frac{dw}{dz} \cos\zeta \, d\sigma - \int \frac{dv}{dz} \frac{dw}{dz} d\varpi,$$

ξ, η, ζ étant les angles de la normale à la surface avec les axes de coordonnées. Multiplions ces trois équations par A, B, C et ajoutons en remarquant qu'on a

$$A \frac{d^2 w}{dx^2} + B \frac{d^2 w}{dy^2} + C \frac{d^2 w}{dz^2} = \delta w;$$

nous aurons

$$\int v \, \delta w \, d\varpi - \int v \left(A \frac{dw}{dx} \cos\xi + B \frac{dw}{dy} \cos\eta + C \frac{dw}{dz} \cos\zeta \right) d\sigma$$
$$= - \int \left(A \frac{dv}{dx} \frac{dw}{dx} + B \frac{dv}{dy} \frac{dw}{dy} + C \frac{dv}{dz} \frac{dw}{dz} \right) d\varpi,$$

et comme le second membre reste invariable par la permutation de v et w, on a

$$\int v \, \delta w \, d\varpi - \int v \left(A \frac{dw}{dx} \cos\xi + B \frac{dw}{dy} \cos\eta + C \frac{dw}{dz} \cos\zeta \right) d\sigma$$
$$= \int w \, \delta v \, d\varpi - \int w \left(A \frac{dv}{dx} \cos\xi + B \frac{dv}{dy} \cos\eta + C \frac{dv}{dz} \cos\zeta \right) d\sigma.$$

Nous écrirons cette équation sous une forme un peu plus simple. Posons

$$P = \sqrt{A^2 \cos^2 \xi + B^2 \cos^2 \eta + C^2 \cos^2 \zeta},$$

$$\cos\alpha = \frac{A \cos\xi}{P}, \quad \cos\beta = \frac{B \cos\eta}{P}, \quad \cos\gamma = \frac{C \cos\zeta}{P};$$

on aura

$$A\frac{dv}{dx}\cos\xi + B\frac{dv}{dy}\cos\eta + C\frac{dv}{dz}\cos\zeta = P\left(\frac{dv}{dx}\cos\alpha + \frac{dv}{dy}\cos\beta + \frac{dv}{dz}\cos\gamma\right).$$

Par le centre de l'élément $d\sigma$, menons une droite t dans la direction (α, β, γ) et prenons sur cette droite, à partir du centre, une longueur infiniment petite τ; soient v et v' les valeurs de v à la première et à la seconde extrémité de l'élément τ, la quantité précédente a pour valeur

$$P\frac{v'-v}{\tau},$$

et nous la représenterons par $\frac{Dv}{Dt}$. On a donc

$$(A)\qquad \int v\,\delta w\,d\varpi - \int w\,\delta v\,d\varpi = \int v\frac{Dw}{Dt}\,d\sigma - \int w\frac{Dv}{Dt}\,d\sigma.$$

2. Supposons que la fonction v satisfasse à l'équation $\delta v = 0$, qu'elle varie d'une manière continue en dedans et en dehors de la surface σ, qu'elle prenne à cette surface la même valeur à l'intérieur et à l'extérieur, et enfin qu'elle s'annule à l'infini; nous allons prouver qu'elle peut être considérée comme le potentiel d'une couche infiniment mince de matière distribuée sur la surface σ.

Faisons

$$w = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{\frac{(x_1-\alpha)^2}{A} + \frac{(y_1-\beta)^2}{B} + \frac{(z_1-\gamma)^2}{C}},$$

(x_1, y_1, z_1) étant un point fixe intérieur à la surface σ et (α, β, γ) un point de $d\varpi$; nous aurons

$$\delta w = 0,$$

et nous pourrons appliquer l'équation précédente au volume renfermé entre la surface σ et une sphère de rayon infiniment petit dont le centre est au point (x_1, y_1, z_1). L'intégrale

$$\int \frac{1}{r}\left(A\frac{dv}{dx}\cos\xi + B\frac{dv}{dy}\cos\eta + C\frac{dv}{dz}\cos\zeta\right)d\sigma$$

étendue à la sphère est un infiniment petit d'ordre r et dont on peut négliger la valeur. Cherchons ensuite ce que devient l'intégrale

$$\int v\left(A\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\xi + B\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\cos\eta + C\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\cos\zeta\right)$$

étendue à la même sphère.

Transportons l'origine des coordonnées au point (x_1, y_1, z_1); nous aurons, r étant la distance de ce point à un point quelconque (x, y, z) de la surface,

$$r^2 = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C},$$

$$\cos\xi = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\eta = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\zeta = \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

et par conséquent

$$A\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\xi + B\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\cos\eta + C\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\cos\zeta = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{r^3}.$$

En désignant par R la distance de l'origine au point (x, y, z), par ψ sa longitude et par θ le complément de sa latitude, on aura

$$x^2+y^2+z^2 = R^2,\quad d\sigma = R^2 \sin\theta\, d\psi\, d\theta.$$

Donc l'intégrale ci-dessus étendue à la sphère a pour valeur le produit de la valeur de v au point (x_1, y_1, z_1) par l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R^3}{r^3}\sin\theta\, d\psi\, d\theta.$$

Désignons par K la valeur de cette intégrale définie, dont nous nous occuperons tout à l'heure, et que nous trouverons égale à $4\pi\sqrt{ABC}$; alors l'équation (A) deviendra

$$0 = \int v\frac{D\frac{1}{r}}{Dt}d\sigma - \int\frac{1}{r}\frac{Dv}{Dt}d\sigma + Kv,$$

ou

$$K v = \int v \frac{D\frac{1}{r}}{Dt'} d\sigma - \int \frac{1}{r} \frac{Dv}{Dt'} d\sigma,$$

t' désignant la direction opposée à t.

Considérons ensuite le volume compris entre la surface σ et une autre surface σ' qui renferme la première; $\frac{1}{r}$ ne devenant pas infini dans cet intervalle, on peut appliquer l'équation (A) à tout ce volume, et l'on a, en supposant que la surface σ' aille à l'infini,

$$o = \int v \frac{D\frac{1}{r}}{Dt} d\sigma - \int \frac{1}{r} \frac{Dv}{Dt} d\sigma.$$

Ajoutant les deux équations obtenues, on a

$$v = -\frac{1}{K} \int \frac{1}{r} \left(\frac{Dv}{Dt} + \frac{Dv}{Dt'} \right) d\sigma;$$

donc v est le potentiel d'une couche dont la densité est

$$-\frac{1}{K} \left(\frac{Dv}{Dt} + \frac{Dv}{Dt'} \right).$$

3. Calculons maintenant la quantité K. Remplaçons, dans l'expression de R, les variables x, y, z par

$$x = R \sin\theta \cos\psi, \quad y = R \sin\theta \sin\psi, \quad z = R \cos\theta,$$

et nous aurons pour l'expression de K

$$K = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta \, d\psi}{\left(\frac{\sin^2\theta \cos^2\psi}{A} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\psi}{B} + \frac{\cos^2\theta}{C} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Faisons $\cos\theta = x$, et nous aurons

$$K = \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{dx \, d\psi}{(M x^2 + P^2)^{\frac{3}{2}}},$$

en posant

$$M = \frac{1}{C} - \frac{\cos^2\psi}{A} - \frac{\sin^2\psi}{B}, \quad P^2 = \frac{\cos^2\psi}{A} + \frac{\sin^2\psi}{B}.$$

Or on a

$$\int \frac{dx}{(Mx^2 + P^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{P^2\sqrt{P^2 + Mx^2}},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(Mx^2 + P^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{P^2\sqrt{P^2 + M}} = \frac{2\sqrt{C}}{\frac{\cos^2\psi}{A} + \frac{\sin^2\psi}{B}};$$

il en résulte

$$K = 2\sqrt{C}\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\frac{\cos^2\psi}{A} + \frac{\sin^2\psi}{B}}.$$

Posons

$$\cos\psi = \frac{-2z}{1+z^2},$$

et nous aurons

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\frac{\cos^2\psi}{A} + \frac{\sin^2\psi}{B}} = 4B\int_{-1}^{1} \frac{(1+z^2)\,dz}{1 + 2\left(\frac{2B}{A} - 1\right)z^2 + z^4}.$$

Les deux racines en z^2 de l'équation

$$z^4 + 2\left(\frac{2B}{A} - 1\right)z^2 + 1 = 0$$

sont

$$-\frac{2B}{A} + 1 \pm 2\sqrt{\frac{B}{A}\left(\frac{B}{A} - 1\right)},$$

et elles sont réelles si A est $<$ B, comme on peut le supposer. Reste à déterminer leur signe; or on a

$$4\frac{B}{A}\left(\frac{B}{A} - 1\right) < \left(-\frac{2B}{A} + 1\right)^2;$$

donc les deux racines auront toujours le même signe que $-\frac{2B}{A} + 1$

ou que $-2B+A$ et elles sont négatives. Désignons-les par $-\alpha^2$ et $-\alpha'^2$; nous aurons pour l'intégrale ci-dessus

$$\int \frac{(1-z^2)\,dz}{(z^2+\alpha^2)(z^2+\alpha'^2)} = \frac{1-\alpha^2}{\alpha(\alpha'^2-\alpha^2)} \text{arc tang} \frac{z}{\alpha} + \frac{\alpha'^2-1}{\alpha'(\alpha'^2-\alpha^2)} \text{arc tang} \frac{z}{\alpha'}.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} K &= 2\sqrt{C}\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\dfrac{\cos^2\psi}{A}+\dfrac{\sin^2\psi}{B}} \\ &= 16B\sqrt{C}\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha(\alpha'^2-\alpha^2)} \text{arc tang} \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha'^2-1}{\alpha'(\alpha'^2-\alpha^2)} \text{arc tang} \frac{1}{\alpha'}\right). \end{aligned}$$

Cette expression peut être beaucoup simplifiée; en effet, α et α' sont les racines positives de l'équation

$$\alpha^4 - 2\left(\frac{2B}{A} - 1\right)\alpha^2 + 1 = 0$$

ou

$$\left(\alpha^2 - 2\sqrt{\frac{B}{A}}\,\alpha + 1\right)\left(\alpha^2 + 2\sqrt{\frac{B}{A}}\,\alpha + 1\right) = 0$$

et appartiennent au premier facteur; on a donc

$$\alpha\alpha' = 1, \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} = 2\sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Remplaçant α' par $\frac{1}{\alpha}$, on a

$$K = 16B\sqrt{C}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\left(\text{arc tang}\frac{1}{\alpha} + \text{arc tang}\frac{1}{\alpha'}\right) = 16B\sqrt{C}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\cdot\frac{\pi}{2};$$

on a aussi

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}} = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{B}};$$

donc enfin

$$K = 4\pi\sqrt{ABC}.$$

4. Le n° **3** de notre Mémoire peut être facilement généralisé, et le théorème qui s'y trouve peut aussi être établi par la considération de l'équilibre de température d'un corps non plus isotrope, mais cristallisé.

5. Rappelons la formule qui donne le flux de chaleur qui traverse un élément plan dont la normale fait avec les axes des angles ξ, η, ζ. Cette formule est

$$U = U_x \cos\xi + U_y \cos\eta + U_z \cos\zeta,$$

U étant ce flux rapporté à l'unité de surface, et U_x, U_y, U_z les flux estimés de même qui traversent trois éléments plans perpendiculaires aux axes de coordonnées et passant en un même point avec le premier élément.

Si l'on choisit convenablement les axes de coordonnées, la température d'équilibre satisfait à l'équation

$$\partial v = A\frac{d^2v}{dx^2} + B\frac{d^2v}{dy^2} + C\frac{d^2v}{dz^2} = 0,$$

et pourvu que la propagation de la chaleur dans le milieu se fasse de la même manière dans deux directions opposées, U_x, U_y, U_z seront proportionnels à $A\frac{dv}{dx}$, $B\frac{dv}{dy}$, $C\frac{dv}{dz}$, et, par suite, si l'on a multiplié les coefficients de l'équation précédente par un nombre convenable, on a

$$U_x = A\frac{dv}{dx}, \quad U_y = B\frac{dv}{dy}, \quad U_z = C\frac{dv}{dz}$$

et

$$U = A\frac{dv}{dx}\cos\xi + B\frac{dv}{dy}\cos\eta + C\frac{dv}{dz}\cos\zeta.$$

En adoptant les notations du n° **1** de cette Note, nous avons donc

$$U = P\frac{v' - v}{\tau} \quad \text{ou} \quad U = \frac{Dv}{Dt}.$$

Ainsi l'expression que nous avons représentée par $\frac{Dv}{Dt}$ est celle du flux de chaleur qui traverse l'élément de surface dont la normale fait

avec les axes les angles ξ, η, ζ, flux de chaleur qui peut être regardé comme ayant la ligne t pour direction.

Imaginons un corps cristallisé T en équilibre de température terminé par une surface σ, et dont la température est donnée en chaque point de cette surface.

Concevons autour du corps T un autre corps de nature identique qui remplisse tout l'espace restant; il est seulement séparé du corps T par un espace infiniment mince qui est le siége d'une source de chaleur; enfin la température est maintenue à zéro à l'infini. La température v à l'intérieur ou à l'extérieur de cette couche sera donnée par la formule

$$v = \frac{-1}{4\pi\sqrt{ABC}}\int \frac{1}{r}\left(\frac{Dv}{Dt} + \frac{Dv}{Dt'}\right)d\sigma,$$

et la quantité

$$\left(\frac{Dv}{Dt} + \frac{Dv}{Dt'}\right)d\sigma$$

représente le double du flux de chaleur provenant de la source qui traverse l'élément $d\sigma$.

Théorème sur l'expression $\delta\delta u$.

6. Continuons à poser

$$A\frac{d^2u}{dx^2} + B\frac{d^2u}{dy^2} + C\frac{d^2u}{dz^2} = \delta u,$$

et le raisonnement qui a conduit à l'équation (2) du n° 7 de notre Mémoire nous donnera l'équation analogue

$$\begin{aligned}&\int u\,\delta\delta u'\,d\varpi - \int u'\,\delta\delta u\,d\varpi\\ &\quad = \int\left(u\frac{D\delta u'}{Dt} - u'\frac{D\delta u}{Dt}\right)d\sigma + \int\left(\delta u\frac{Du'}{Dt} - \delta u'\frac{Du}{Dt}\right)d\sigma,\end{aligned}$$

où u et u' sont des fonctions continues des coordonnées a, b, c d'un point quelconque du corps. De plus, leurs dérivées des trois premiers ordres doivent être supposées jouir de la même continuité.

Si l'on y fait

$$u' = r, \quad r = \sqrt{\frac{(x-a)^2}{A} + \frac{(y-b)^2}{B} + \frac{(z-c)^2}{C}},$$

on aura

$$\int r\,\delta\,\partial u\,d\varpi = \int\left(r\frac{D\,\delta u}{Dt} - \partial u\frac{Dr}{Dt}\right)d\sigma + 2\int\left(\frac{1}{r}\frac{Du}{Dt} - u\frac{D\frac{1}{r}}{Dt}\right)d\sigma,$$

pourvu que le point (x, y, z) soit extérieur à la surface σ.

Si le point (x, y, z) est situé à l'intérieur de la surface σ et qu'on fasse encore $u' = r$, on appliquera l'équation ci-dessus au volume compris entre la surface σ et celle d'une sphère dont le centre est au point (x, y, z); en faisant usage de l'expression obtenue au n° 3 pour K, on aura la formule

$$\int r\delta\,\partial u\,d\varpi = \int\left(r\frac{D\,\delta u}{Dt} - \partial u\frac{Dr}{Dt}\right)d\sigma$$
$$+ 2\int\left(\frac{1}{r}\frac{Du}{Dt} - u\frac{D\frac{1}{r}}{Dt}\right)d\sigma - 8\pi\sqrt{ABC}\,u,$$

où dans le dernier terme on remplace a, b, c par x, y, z.

Sur la valeur de ∂v à l'intérieur de la masse.

7. Soit le potentiel donné par l'intégrale triple

$$v = \int\int\int \frac{\varphi(a, b, c)}{r}\,da\,db\,dc,$$

qui est étendue à un volume Π et dans laquelle on a

$$r^2 = \frac{(x-a)^2}{A} + \frac{(y-b)^2}{B} + \frac{(z-c)^2}{C}.$$

Si l'on a $A = B = C = 1$, on sait que l'on a

$$\Delta v = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta v = -4\pi\varphi(x, y, z),$$

selon que le point (x, y, z) est situé en dehors ou en dedans de la masse. Dans le cas général où les nombres positifs A, B, C sont quelconques, on peut, selon la méthode du cas particulier, imaginer une sphère infiniment petite qui renferme le point (x, y, z). Si V et V_1 sont le potentiel de la sphère et celui de la partie du volume Π extérieure à la sphère, on aura $\delta V_1 = 0$, et δv sera égal à δV, qui sera seul à déterminer.

Le potentiel de la sphère homogène ne peut plus maintenant s'exprimer qu'à l'aide d'une intégrale définie simple, et il faut diriger la recherche avec soin pour obtenir δV sans calculs trop compliqués.

Le potentiel d'une sphère, dont la densité est l'unité, sera donné par l'intégrale triple

$$v = \int\int\int \frac{1}{r}\, da\, db\, dc,$$

tous les éléments $da\,db\,dc$ appartenant au volume de cette sphère; et l'on a

$$A\frac{dv}{dx} = -\int\int\int \frac{x-a}{r^3}\, da\, db\, bc.$$

Si donc nous posons

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

$A\frac{dv}{dx}$ représente la composante suivant l'axe des x d'une attraction dont la loi élémentaire a pour valeur $\frac{R}{r^3}$; point important à remarquer.

La sphère qui nous occupe peut être supposée avoir son centre à l'origine des coordonnées, et elle renferme le point $M(x, y, z)$; son équation sera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \varepsilon^2.$$

Soit $d\omega$ un angle solide élémentaire dont le sommet est en M et mené dans la direction du rayon R qui joint le point M au point (a, b, c). Dans cet angle solide, prenons l'élément de volume $R^2 d\omega dR$ limité par deux sphères dont le centre est en M et de rayon R et $R + dR$. L'attraction sur le point M de cet élément de volume, d'après la loi

donnée ci-dessus, est

$$f\frac{R}{r^3}R^2 d\omega dR,$$

f étant un coefficient constant. Faisons la somme de tous les éléments de la sphère renfermés dans l'angle $d\omega$, nous aurons

$$fd\omega\int_0^R \frac{R^3}{r^3}dR,$$

la limite supérieure R désignant la distance du point M au centre de la section de la sphère formée par l'angle solide.

Les trois composantes de cette attraction sont

$$fd\omega\cos\lambda\int_0^R \frac{R^3}{r^3}dR,\quad fd\omega\cos\mu\int_0^R \frac{R^3}{r^3}dR,\quad fd\omega\cos\nu\int_0^R \frac{R^3}{r^3}dR.$$

λ, μ, ν étant les angles de R avec les trois axes de coordonnées.

Pour les composantes de l'action du cône opposé par le sommet au premier, on aura

$$fd\omega\cos\lambda\int_{-R'}^0 \frac{R^3}{r^3}dR,\quad fd\omega\cos\mu\int_{-R'}^0 \frac{R^3}{r^3}dR,\quad fd\omega\cos\nu\int_{-R'}^0 \frac{R^3}{r^3}dR,$$

R′ étant la distance du point M au centre de la base de ce cône.

Ajoutant, on a pour les composantes de la somme des deux attractions

$$fd\omega\cos\lambda\int_{-R'}^R \frac{R^3}{r^3}dR,\quad fd\omega\cos\mu\int_{-R'}^R \frac{R^3}{r^3}dR,\quad fd\omega\cos\nu\int_{-R'}^R \frac{R^3}{r^3}dR.$$

Nous avons ensuite, R étant la distance de M à un point (α, β, γ) de la sphère,

$$\alpha - x = R\cos\lambda,\quad \beta - y = R\cos\mu,\quad \gamma - z = R\cos\nu$$

et

$$r^2 = R^2\left(\frac{\cos^2\lambda}{A} + \frac{\cos^2\mu}{B} + \frac{\cos^2\nu}{C}\right).$$

Par suite, la première des trois composantes a pour valeur

$$\frac{f\,d\omega\cos\lambda}{\left(\frac{\cos^2\lambda}{A}+\frac{\cos^2\mu}{B}+\frac{\cos^2\nu}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}(R+R').$$

Dans l'équation de la sphère

$$X^2+Y^2+Z^2=\varepsilon^2,$$

faisons

$$X=x+R\cos\lambda,\quad Y=y+R\cos\mu,\quad Z=z+R\cos\nu,$$

il viendra

$$R^2+2(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)R=\varepsilon^2-x^2-y^2-z^2,$$

et on aura

$$R+R'=-2(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu).$$

On a donc pour la première composante

$$-2f\frac{\cos\lambda(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)}{\left(\frac{\cos^2\lambda}{A}+\frac{\cos^2\mu}{B}+\frac{\cos^2\nu}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}d\omega.$$

Intégrant tout autour du point M, et supprimant les termes multipliés par y et z dont les intégrales sont nulles séparément, on a pour la quantité $A\frac{dV}{dx}$

$$A\frac{dV}{dx}=-x\int\frac{\cos^2\lambda\,d\omega}{\left(\frac{\cos^2\lambda}{A}+\frac{\cos^2\mu}{B}+\frac{\cos^2\nu}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a deux expressions semblables pour $B\frac{dV}{dy}$, $C\frac{dV}{dz}$, et, par suite, on obtient

$$\partial V=A\frac{d^2V}{dx^2}+B\frac{d^2V}{dy^2}+C\frac{d^2V}{dz^2}=-\int\frac{d\omega}{\left(\frac{\cos^2\lambda}{A}+\frac{\cos^2\mu}{B}+\frac{\cos^2\nu}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Adoptant deux angles θ et ψ des coordonnées polaires, posons

$$\cos\xi = \sin\theta\cos\psi, \quad \cos\eta = \sin\theta\sin\psi, \quad \cos\zeta = \cos\theta,$$
$$d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

et nous aurons

$$\partial V = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\psi}{\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{A} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{B} + \frac{\cos^2\theta}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette intégrale double est celle que nous avons désignée par K au n° **5**; nous avons donc

$$\partial V = -4\pi\sqrt{ABC}.$$

De là on conclut qu'au point (x, y, z) de la masse H, où la densité est $\varphi(x, y, z)$, on a

$$\partial v = -4\pi\sqrt{ABC}\,\varphi(x, y, z).$$

8. La quantité que nous appelons *second potentiel* a pour valeur

$$w = \iiint r\varphi(a, b, c)\, da\, db\, dc;$$

on a

$$\partial w = 2v,$$

et par suite

$$\partial\partial w = 0$$

si le point (x, y, z) est extérieur au volume H,

$$\partial\partial w = -8\pi\sqrt{ABC}\,\varphi(x, y, z)$$

s'il lui est intérieur.

Sur la solution générale de l'équation $\partial\partial u = 0$.

Dans ce qui précède, nous avons dû faire quelques modifications aux raisonnements de notre Mémoire pour leur donner l'extension que nous nous sommes proposée; mais, à partir de ce point, les démonstrations restent les mêmes, ou n'exigent que des changements insignifiants.

Ainsi, on a sur la solution de l'équation $\partial\partial u = 0$ les théorèmes suivants :

1° Toute fonction u qui satisfait, dans l'intérieur de la surface σ, à l'équation $\partial\partial u = 0$, et qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, est la somme du premier potentiel d'une couche qui recouvre la surface σ, et du second potentiel d'une autre couche mise sur la même surface.

[Il est entendu que les coefficients A, B, C qui entrent dans ce premier et ce second potentiel sont les mêmes que ceux qui figurent dans l'expression de $\partial\partial u$. Si l'on voulait indiquer les coefficients A, B, C, il conviendrait d'appeler ces quantités le premier et le second potentiel (A, B, C).]

2° Il existe une fonction, et une seule, qui satisfait à l'équation $\partial\partial u = 0$ dans l'intérieur de la surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres et pour laquelle u et ∂u, ou u et $\frac{Du}{Dl}$, ont sur la surface σ des valeurs déterminées.

3° Soient un point (x, y, z) extérieur à la surface σ et un point (a, b, c) à l'intérieur; posons

$$R^2 = \frac{(x-a)^2}{A} + \frac{(y-b)^2}{B} + \frac{(z-c)^2}{C},$$

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\psi, \quad z = r\sin\theta\sin\psi;$$

si une fonction de (x, y, z) satisfait partout, à l'extérieur de σ, à l'équation $\partial\partial u = 0$, qu'elle soit continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et que, de plus, quand le point (x, y, z) s'éloigne à une très-grande distance de la surface σ, elle se réduise à la forme

$$MR + N\cos\theta + P\sin\theta\cos\psi + Q\sin\theta\sin\psi,$$

M, N, P, Q étant des constantes; cette fonction est alors la somme du premier et du second potentiel de deux couches qui recouvrent la surface.

Extrait d'une Lettre adressée à M. V.-A. Le Besgue;

Par M. J. LIOUVILLE.

. . . Permettez-moi de vous communiquer une formule que je crois nouvelle et qui vous paraîtra peut-être intéressante. Cette formule conduira, je l'espère, à des conséquences utiles dans la théorie des nombres, dont vous vous êtes occupé avec tant de succès.

» Soit m un nombre entier donné, de la forme

$$4l + 1.$$

Posons d'abord, de toutes les manières possibles,

$$m = i^2 + \varpi^2 + 16 s^2,$$

i désignant un entier impair et positif, ϖ un entier pair, positif, nul ou négatif, enfin s un entier indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. Puis cherchons la somme

$$\text{(A)} \qquad \sum (-1)^{s + \frac{i^2 - 1}{8}} \mathfrak{F}(\varpi)$$

relative à tous les systèmes de valeurs (i, ϖ, s) pour lesquelles notre équation a lieu : $\mathfrak{F}$ indique ici une fonction algébrique ou numérique quelconque.

» D'un autre côté, faisons aussi, de toutes les manières possibles,

$$m = i_1^2 + \varpi_1^2 + 8 s_1^2,$$

i_1 désignant un entier impair et positif, ϖ_1 un entier pair, positif, nul ou négatif, enfin s_1 un entier indifféremment pair ou impair, positif,

nul ou négatif. Puis cherchons, pour tous les systèmes (i_1, ϖ_1, s_1), la somme

$$(\text{B}) \qquad \Sigma(-1)^{s_1} \mathcal{F}(\varpi_1),$$

où la fonction $\mathcal{F}$ est la même que ci-dessus.

» Je dis que les deux sommes (A) et (B), que je désignerai par A et B, sont toujours égales entre elles. En d'autres termes, on a toujours

$$(1) \qquad \Sigma(-1)^{s+\frac{i^2-1}{8}} \mathcal{F}(\varpi) = \Sigma(-1)^{s_1} \mathcal{F}(\varpi_1).$$

» Vérifions ce théorème sur quelques exemples. Prenant d'abord

$$m = 1,$$

nous aurons pour l'équation

$$m = i^2 + \varpi^2 + 16s^2$$

une seule solution, savoir

$$i = 1, \quad \varpi = 0, \quad s = 0,$$

et, par suite,

$$\text{A} = \mathcal{F}(0).$$

D'autre part, l'équation

$$m = i_1^2 + \varpi_1^2 + 8s_1^2$$

n'a aussi alors qu'une seule solution, savoir

$$i_1 = 1, \quad \varpi_1 = 0, \quad s_1 = 0,$$

de laquelle on conclut

$$\text{B} = \mathcal{F}(0);$$

donc A = B, conformément à notre théorème.

» Soit à présent

$$m = 5.$$

L'équation

$$5 = i^2 + \varpi^2 + 16 s^2$$

aura deux solutions, savoir

$$i = 1, \quad \varpi = 2, \qquad s = 0,$$

puis

$$i = 1, \quad \varpi = -2, \quad s = 0,$$

d'où

$$A = \mathfrak{F}(2) + \mathfrak{F}(-2);$$

l'équation

$$5 = i_1^2 + \varpi_1^2 + 8 s_1^2$$

aura également deux solutions, répondant l'une à

$$i_1 = 1, \quad \varpi_1 = 2, \qquad s_1 = 0,$$

l'autre à

$$i_1 = 1, \quad \varpi_1 = -2, \quad s_1 = 0;$$

de là pour B cette valeur

$$\mathfrak{F}(2) + \mathfrak{F}(-2),$$

qui est bien celle même de A.

» Soit, comme troisième exemple,

$$m = 9.$$

L'équation

$$9 = i^2 + \varpi^2 + 16 s^2$$

n'a qu'une seule solution, fournie par

$$i = 3, \quad \varpi = 0, \quad s = 0,$$

d'où

$$A = -\mathfrak{F}(0).$$

Quant à l'équation

$$9 = i_1^2 + \varpi_1^2 + 8 s_1^2,$$

elle est vérifiée non-seulement par

$$i_1 = 3, \quad \varpi_1 = 0, \quad s_1 = 0,$$

mais encore par

$$i_1 = 1, \quad \varpi_1 = 0, \quad s_1 = 1,$$

et par

$$i_1 = 1, \quad \varpi_1 = 0, \quad s_1 = -1.$$

De là

$$B = \mathfrak{F}(0) - \mathfrak{F}(0) - \mathfrak{F}(0) = -\mathfrak{F}(0).$$

Donc, cette fois encore, l'équation

$$A = B$$

se trouve exacte. Je ne pousserai pas plus loin ces vérifications faciles. »

Étude sur la mécanique des atomes [*];

PAR M. FÉLIX LUCAS,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

§ I. — *Actions intérieures d'un système atomique.*

SOMMAIRE : Définition d'un système atomique. — Données analytiques. — Notations. — Action totale en un point. — Effort total. — Effort de déplacement. — Effort de déformation. — Déplacement auxiliaire. — Relations entre les efforts. — Formules au potentiel.

1. *Définition d'un système atomique.* — Soit un système de corps absolument quelconques pour leurs formes, leurs masses et les substances qui les composent. Assignons-leur respectivement les indices

$$1, 2, 3, \ldots, N,$$

qui nous serviront à les désigner.

Disposons ces corps n'importe comment dans l'espace, pourvu toutefois que leurs distances soient immensément grandes relativement à leurs dimensions. Ces dernières deviendront négligeables, en sorte que nous pourrons concentrer par la pensée la matière de chaque corps en son centre de gravité.

Les points matériels ou *atomes* ainsi obtenus seront des *centres d'action* s'attirant ou se repoussant les uns les autres suivant des lois déterminées. Leur ensemble constitue ce que nous appelons un *système atomique*.

[*] Des recherches préliminaires ayant trait au même sujet ont donné lieu à un Rapport à l'Institut, par M. de Saint-Venant. (Voir *Comptes rendus*, séance du 14 février 1870.)

2. *Données analytiques.* — Pour définir *géométriquement* un pareil système, il suffit de connaître pour chaque atome m les trois coordonnées

$$X_m, Y_m, Z_m,$$

qui rapportent à trois axes rectangulaires quelconques sa position dans l'espace.

Pour le définir *mécaniquement*, il faut d'abord ajouter à ces données la masse g_m de chaque atome m. Il faut ensuite se donner les expressions analytiques de l'*action* et de la *réaction* qui existent entre les atomes m et n, m et n étant deux nombres inégaux quelconques pris dans la série

$$1, 2, 3, \ldots, N.$$

Nous admettrons que l'action exercée par m sur n tombe sur la droite mn. Quand elle tendra à rapprocher n de m, nous dirons qu'il y a *attraction*, et nous regarderons la force comme *positive;* dans le cas contraire, il y aura *répulsion*, et la force sera *négative*. Nous supposerons cette action de telle nature qu'on puisse la représenter en grandeur et en signe par l'expression

$$g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n}),$$

$R_{m,n}$ désignant la distance (positive) des points m et n, $f_{m,n}$ une fonction continue quelconque.

Nous admettrons en outre que la réaction de n sur m soit égale à l'action de m sur n, mais dirigée en sens opposé.

Les combinaisons deux à deux des indices

$$1, 2, 3, \ldots, N$$

étant au nombre de

$$\frac{N(N-1)}{2},$$

il y a autant de fonctions f correspondantes, que nous supposerons données.

3. *Notations.* — Afin de simplifier les écritures qui vont suivre, nous poserons

$$\frac{1}{R_{m,n}} g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n}) = F_{m,n}, \tag{1}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} X_m - X_n = X_{m,n}, \\ Y_m - Y_n = Y_{m,n}, \\ Z_m - Z_n = Z_{m,n}. \end{array} \right. \tag{2}$$

Il en résultera

$$F_{m,n} = F_{n,m}, \tag{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{m,n} = - X_{n,m}, \\ Y_{m,n} = - Y_{n,m}, \\ Z_{m,n} = - Z_{n,m}. \end{array} \right. \tag{4}$$

Le signe S_m désignera une somme de termes obtenus en donnant successivement à m toutes les valeurs

$$1, 2, 3, \ldots, N,$$

sans aucune exception.

Le signe Σ_n, qui portera sur des termes où figureront les deux indices m et n, désignera une somme de termes obtenus en donnant à n toutes les valeurs de la série précédente, sauf la valeur m.

4. *Action totale en un point.* — Les trois composantes U_m, V_m, W_m de l'action totale exercée en m par les autres points du système atomique ont pour valeurs

$$\left\{ \begin{array}{l} U_m = \Sigma_n X_{n,m} F_{m,n}, \\ V_m = \Sigma_n Y_{n,m} F_{m,n}, \\ W_m = \Sigma_n Z_{n,m} F_{m,n}. \end{array} \right. \tag{5}$$

Comme les forces intérieures sont toutes deux à deux égales et contraires, elles se feraient équilibre sur le système atomique s'il était sup-

posé rigide. De là les six équations

$$(6) \qquad S_m U_m = S_m V_m = S_m W_m = 0,$$

$$(7) \qquad \begin{cases} S_m (V_m X_m - U_m Y_m) = 0, \\ S_m (W_m Y_m - V_m Z_m) = 0, \\ S_m (U_m Z_m - W_m X_m) = 0. \end{cases}$$

5. *Effort total.* — Si les points m et n venaient à subir des déplacements infinitésimaux (x_m, y_m, z_m) et (x_n, y_n, z_n), les trois projections de l'action exercée par le second de ces points sur le premier subiraient des variations représentées par les expressions

$$(8) \qquad \begin{cases} X_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} x_{n,m}, \\ Y_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} y_{n,m}, \\ Z_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} z_{n,m}, \end{cases}$$

dans lesquelles

$$(9) \qquad \begin{cases} x_{n,m} = x_n - x_m, \\ y_{n,m} = y_n - y_m, \\ z_{n,m} = z_n - z_m, \end{cases}$$

$$(10) \qquad r_{m,n} = \frac{X_{n,m}}{R_{m,n}} x_{n,m} + \frac{Y_{n,m}}{R_{m,n}} y_{n,m} + \frac{Z_{n,m}}{R_{m,n}} z_{n,m}.$$

Supposons maintenant que le système atomique vienne à changer de figure infiniment peu, de manière que chacun de ses points subisse un déplacement infinitésimal, l'action totale au point m éprouvera une variation représentée par les formules

$$(11) \qquad \begin{cases} u_m = \Sigma_n (X_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} x_{n,m}), \\ v_m = \Sigma_n (Y_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} y_{n,m}), \\ w_m = \Sigma_n (Z_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} z_{n,m}). \end{cases}$$

Nous appelons *effort total*, ou simplement *effort*, au point m, la résultante de ces trois petites forces.

Les expressions (11) sont linéaires relativement aux (x_m, y_m, z_m) et aux (x_n, y_n, z_n). On peut donc décomposer l'effort total en deux parties, savoir :

1° L'effort qui résulterait du seul déplacement du point m, tous les autres points restant fixes;

2° L'effort qui résulterait des déplacements de tous les autres points, m étant supposé maintenu dans sa position primitive.

Nous pouvons appeler la première composante *effort de déplacement*, et la seconde *effort de déformation*. En désignant respectivement leurs projections par (u'_m, v'_m, w'_m), et (u''_m, v''_m, w''_m), nous aurons

$$(12)\qquad \begin{cases} u_m = u'_m + u''_m, \\ v_m = v'_m + v''_m, \\ w_m = w'_m + w''_m. \end{cases}$$

6. *Effort de déplacement.* — Les valeurs de u'_m, v'_m, w'_m s'obtiennent en faisant

$$(13)\qquad x_n = y_n = z = 0$$

dans les formules (11).

Posant, pour simplifier les écritures,

$$(14)\qquad \begin{cases} \sum_n \left(\frac{X^2_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} + F_{m,n} \right) = g_m A_m, \\ \sum_n \left(\frac{Y^2_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} + F_{m,n} \right) = g_m B_m, \\ \sum_n \left(\frac{Z^2_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} + F_{m,n} \right) = g_m C_m; \end{cases}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} \sum_n \frac{X_{n,m} Y_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} = g_m P_m, \\ \sum_n \frac{Y_{n,m} Z_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} = g_m Q_m, \\ \sum_n \frac{Z_{n,m} X_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} = g_m R_m, \end{cases}$$

on trouve

$$(16)\qquad \begin{cases} -\frac{1}{g_m} u'_m = A_m x_m + P_m y_m + R_m z_m, \\ -\frac{1}{g_m} v'_m = P_m x_m + B_m y_m + Q_m z_m, \\ -\frac{1}{g_m} w'_m = R_m x_m + Q_m y_m + C_m z_m, \end{cases}$$

pour expressions des trois projections de l'effort de déplacement.

7. *Effort de déformation.* — Les valeurs de u''_m, v''_m, w''_m s'ob-

tiennent en faisant

(17) $$x_m = y_m = z_m = 0$$

dans les formules (11). Il vient ainsi

(18) $$\left\{\begin{aligned} u''_m &= \Sigma_n (x_n F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} x_n),\\ v''_m &= \Sigma_n (y_n F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} y_n),\\ w''_m &= \Sigma_n (z_n F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} z_n).\end{aligned}\right.$$

La valeur de $r_{m,n}$, déduite de la formule (10), est

(19) $$r_{m,n} = \frac{X_{n,m}}{R_{n,m}} x_n + \frac{Y_{n,m}}{R_{n,m}} y_n + \frac{Z_{n,m}}{R_{n,m}} z_n.$$

8. *Déplacement auxiliaire.* — Posons

(20) $$\left\{\begin{aligned} -\frac{1}{g_m} u''_m &= A_m \xi_m + P_m \eta_m + R_m \zeta_m,\\ -\frac{1}{g_m} v''_m &= P_m \xi_m + B_m \eta_m + Q_m \zeta_m,\\ -\frac{1}{g_m} w''_m &= R_m \xi_m + Q_m \eta_m + C_m \zeta_m.\end{aligned}\right.$$

Les trois inconnues ξ_m, η_m, ζ_m déterminées par ces équations pourront être regardées comme les projections d'une droite infinitésimale dont elles feront connaître la grandeur et la direction.

Si, rendant fixes tous les atomes à l'exclusion de m, on imprimait à ce dernier un déplacement égal et parallèle à la droite ci-dessus définie, l'effort correspondant aurait pour projections u''_m, v''_m, w''_m. Au moyen de ce déplacement auxiliaire ξ_m, η_m, ζ_m, les valeurs des projections de l'effort total défini au n° 5, peuvent s'écrire

(21) $$\left\{\begin{aligned} -\frac{1}{g_m} u_m &= A_m (x_m + \xi_m) + P_m (y_m + \eta_m) + R_m (z_m + \zeta_m),\\ -\frac{1}{g_m} v_m &= P_m (x_m + \xi_m) + B_m (y_m + \eta_m) + Q_m (z_m + \zeta_m),\\ -\frac{1}{g_m} w_m &= R_m (x_m + \xi_m) + Q_m (y_m + \eta_m) + C_m (z_m + \zeta_m).\end{aligned}\right.$$

9. *Relations entre les efforts.* — Après comme avant la déformation, les forces intérieures sont deux à deux égales et contraires. Si l'on supposait que le système devînt rigide, ces forces se feraient équilibre.

Le système déformé donne donc naissance à six équations analogues à celles des groupes (6) et (7), et qui se déduisent de celles-ci en remplaçant X_m, Y_m, Z_m par $(X_m + x_m)$, $(Y_m + y_m)$, $(Z_m + z_m)$, et V_m, U_m, W_m par $(U_m + u_m)$, $(V_m + v_m)$, $(W_m + w_m)$.

Négligeant les infiniment petits du second ordre, et tenant compte de (6) et (7), on trouve ainsi

$$S_m u_m = S_m v_m = S_m w_m = 0, \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} &S_m(V_m x_m - U_m y_m) + S_m(v_m X_m - u_m Y_m) = 0,\\ &S_m(W_m y_m - V_m z_m) + S_m(w_m Y_m - v_m Z_m) = 0,\\ &S_m(U_m z_m - W_m x_m) + S_m(u_m Z_m - w_m X_m) = 0. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

10. *Formules au potentiel.* — Si l'on pose

$$\Phi_m = -\Sigma \int g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n})\, dR_{m,n}, \tag{24}$$

la fonction Φ_m représente le *potentiel* relatif au point m dans le système primitif.

On trouve, en prenant ses dérivées premières,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\Phi_m}{dX_m} = U_m,\\ &\frac{d\Phi_m}{dY_m} = V_m,\\ &\frac{d\Phi_m}{dZ_m} = W_m; \end{aligned}\right. \tag{25}$$

et, en prenant ses dérivées secondes,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\Phi_m}{dX_m^2} = -g_m A_m,\\ &\frac{d^2\Phi_m}{dY_m^2} = -g_m B_m,\\ &\frac{d^2\Phi_m}{dZ_m^2} = -g_m C_m, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\Phi_m}{dX_m\,dY_m} = \frac{d^2\Phi_m}{dY_m\,dX_m} = -g_m P_m,\\ &\frac{d^2\Phi_m}{dY_m\,dZ_m} = \frac{d^2\Phi_m}{dZ_m\,dY_m} = -g_m Q_m,\\ &\frac{d^2\Phi_m}{dZ_m\,dX_m} = \frac{d^2\Phi_m}{dX_m\,dZ_m} = -g_m R_m. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

§ II. — *Statique atomique.*

SOMMAIRE : Objet de ce paragraphe. — Équations fondamentales. — Équations inverses — Ellipsoïde. — Axes principaux des coordonnées. — Divers modes d'équilibre. — Paramètres physiques. — Constitution des corps. — Phénomènes calorifiques. — Mouvements infinitésimaux.

1. *Objet de ce paragraphe.* — Assujettissons tous les points d'un système atomique à une fixité absolue. L'action totale au point m prendra une direction et une intensité que nous pourrions calculer au moyen des formules précédemment établies.

Imaginons qu'on applique à ce point m une force égale et contraire à cette action totale. Détruisons ensuite sa fixité, sans lui imprimer aucune vitesse; il se trouvera évidemment en équilibre et dans un état de repos absolu.

Cela posé, assujettissons la force auxiliaire à rester, quoi qu'il arrive, constante en grandeur et en direction, et supposons qu'on donne au point m divers déplacements infinitésimaux autour de sa position d'équilibre. A chacun de ces déplacements correspondra un *effort* de grandeur et de direction déterminées.

Il existe, entre les déplacements et les efforts, certaines lois de dépendance que nous allons étudier.

2. *Équations fondamentales.* — A cet effet, nous désignerons par :

x, y, z les trois projections d'un déplacement quelconque;

u, v, w celles de l'effort correspondant;

g la masse du point m;

A, B, C, P, Q, R, les paramètres constants relatifs au point m, que nous avons précédemment représentés par A_m, B_m, C_m, P_m, Q_m, R_m.

Nous aurons alors pour équations fondamentales

$$(1)\quad \begin{cases} -\dfrac{u}{g} = Ax + Py + Rz, \\ -\dfrac{v}{g} = Px + By + Qz, \\ -\dfrac{w}{g} = Rx + Qy + Cz. \end{cases}$$

Ces équations étant linéaires, on voit qu'*à des déplacements opérés suivant une même droite correspondent des efforts dirigés sur des droites parallèles entre elles; les intensités des efforts sont proportionnelles aux amplitudes des déplacements*.

3. *Équations inverses*. — Des équations (1) on peut déduire des équations inverses, exprimant x, y, z au moyen de u, v, w.

Formons en effet le déterminant symétrique

$$(2)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & P & R \\ P & B & Q \\ R & Q & C \end{vmatrix}$$

et désignons par a, b, c, p, q, r ses mineurs relatifs à A, B, C, P, Q, R.

Posons ensuite

$$(3)\qquad \begin{cases} a = A'\Delta, & b = B'\Delta, & c = C'\Delta, \\ p = P'\Delta, & q = Q'\Delta, & r = R'\Delta; \end{cases}$$

nous aurons

$$(4)\qquad \begin{cases} -gx = A'u + P'v + R'w, \\ -gy = P'u + B'v + Q'w, \\ -gz = R'u + Q'v + C'w. \end{cases}$$

4. *Ellipsoïde*. — Si la direction du déplacement vient à varier de toutes les manières possibles et qu'en même temps son amplitude reste constante, on a

$$(5)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

r désignant cette amplitude.

On déduit alors des équations (4)

$$(6)\quad (A'u + P'v + R'w)^2 + (P'u + B'v + Q'w)^2 + (R'u + Q'v + C'w)^2 = g^2 r^2.$$

Par conséquent, en menant par un point quelconque de l'espace des lignes égales et parallèles aux divers efforts, on obtient pour lieu géométrique des extrémités de ces droites la surface d'un *ellipsoïde*

5. *Axes principaux des coordonnées.* — A chaque valeur de r correspond un ellipsoïde particulier; de là une famille de surfaces. *Tous ces ellipsoïdes sont semblables et semblablement orientés.* Ils admettent tous un même système de *plans principaux*, auxquels nous pouvons rapporter nos coordonnées.

Nous faisons ainsi disparaître dans l'équation (6) les termes en uv, uw, vw. On a donc

$$(7)\qquad P' = Q' = R' = 0.$$

et les équations (4) deviennent

$$(8)\qquad \begin{cases} -gx = A'u, \\ -gy = B'v, \\ -gz = C'w. \end{cases}$$

Posons enfin

$$(9)\qquad A'H = B'K = C'L = 1,$$

et nous aurons

$$(10)\qquad \begin{cases} \frac{1}{g}u = -Hx, \\ \frac{1}{g}v = -Ky, \\ \frac{1}{g}w = -Lz. \end{cases}$$

Ces équations expriment, sous la forme la plus simple, les lois de dépendance entre les efforts et les déplacements correspondants.

Pour qu'un déplacement et l'effort qu'il engendre tombent tous les deux sur la même droite, de manière à former un angle nul ou égal à π, il faut et suffit que cette droite soit parallèle à un des axes principaux des coordonnées.

6. *Divers modes d'équilibre.* — Désignons par O la position initiale de l'atome m.

Si les trois paramètres H, K, L sont *positifs*, l'effort (u, v, w) en-

gendre par un déplacement quelconque (x, y, z) tend à rapprocher m du point O. Il y a donc équilibre *stable*.

Si ces trois paramètres sont *nuls*, un déplacement quelconque n'engendre aucun effort appréciable. L'équilibre est *indifférent*.

Si ces trois paramètres sont *négatifs*, l'effort a toujours une tendance à augmenter l'amplitude de l'écartement. Il y a équilibre *instable*.

Le point O se comporte, dans le premier cas, comme un foyer d'attraction; dans le second cas, il est inactif; dans le dernier cas, il est répulsif.

Dans le premier cas, l'atome m rappelle à notre esprit la molécule d'un *solide;* dans le second, celle d'un *liquide;* dans le troisième, celle d'un *gaz*.

Si l'*un* des trois paramètres était *nul*, les *deux* autres étant *positifs*, ou encore si l'*un* de ces paramètres était *positif*, les *deux* autres étant *nuls*, l'équilibre serait à la fois *indifférent et stable*. La solidité serait incomplète; l'atome m pourrait représenter la molécule d'un *corps pâteux*.

Si l'*un* des paramètres était *négatif*, les *deux* autres étant *nuls*, ou encore si l'*un* des paramètres était *nul*, les *deux* autres étant *négatifs*, l'équilibre serait *instable et indifférent*. Il y aurait gazéité imparfaite; l'atome m rappellerait à l'esprit la molécule d'une *vapeur naissant d'un liquide*.

Les combinaisons suivantes :

deux paramètres *positifs* et *un négatif*,
un paramètre *positif*, un *nul* et *un négatif*,
un paramètre *positif* et *deux négatifs*,

caractérisées par la coexistence des signes + et −, donnent naissance à un équilibre à la fois *stable* et *instable;* l'atome m peut alors représenter la molécule d'une *vapeur émanant d'un solide*.

7. *Paramètres physiques.* — Ainsi donc les valeurs des coefficients H, K, L servent à caractériser l'état physique de l'atome m; nous les appellerons pour ce motif *paramètres physiques*.

Ces paramètres sont les valeurs particulières que prennent A, B, C dans les équations (1), lorsqu'on rapporte le système atomique aux

plans principaux des coordonnées relatifs au point m. Alors P, Q, R sont évidemment nuls.

En désignant par X, Y, Z les coordonnées du point O rapportées à ces plans et par Φ le potentiel relatif au point m, on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} gH &= \frac{d^2\Phi}{dX^2},\\ gK &= \frac{d^2\Phi}{dY^2},\\ gL &= \frac{d^2\Phi}{dZ^2}.\end{aligned}\right.$$

Nous voyons, par ces formules, que les *paramètres physiques* de l'atome m dépendent non-seulement des masses atomiques et de la nature des actions à distance, mais aussi de la configuration géométrique du système.

Supposons que la figure se déforme suivant une loi continue quelconque, le point m étant maintenu dans sa position primitive O par une force auxiliaire constamment égale et contraire à l'action totale en ce point. Les valeurs de H, K, L subiront elles-mêmes des variations continues; elles pourront passer par zéro et changer de signes. Il se produira dès lors au point m des changements d'état physique.

8. *Constitution des corps.* — Quel que soit l'état physique d'un corps naturel, on admet aujourd'hui que ce corps est composé de molécules séparées entre elles par des intervalles infiniment grands relativement à leurs dimensions et agissant les unes sur les autres en fonction des distances.

En reportant par la pensée la matière de chaque molécule sur le point mathématique qu'elle admet pour centre de gravité, on obtient un système atomique.

Cela posé, considérons d'abord un corps solide. Dans le système atomique correspondant, les trois *paramètres physiques* seront *positifs* en chaque point. L'équilibre réalisé à un moment donné sous l'action de forces extérieures quelconques sera doué de *stabilité*. Les positions correspondantes des atomes jouant alors le rôle des centres attractifs, le corps présentera une certaine résistance aux déformations.

Si une cause accidentelle vient le comprimer ou le dilater, il conservera comme une tendance à reprendre sa forme première. De là les phénomènes qui constituent l'*élasticité* du solide.

Dans un liquide parfait, les trois paramètres physiques se trouveraient nuls en chaque point. Un tel corps n'existe pas dans la nature. Mais on connaît des corps *presque liquides*. Les valeurs de H, K, L sont alors très-faibles en chaque point. De là des équilibres presque indifférents auxquels est due la *viscosité* du corps.

Les molécules d'un gaz ne sont jamais en repos; elles n'oscillent jamais autour de positions moyennes. Si l'on pouvait à un moment donné détruire leurs vitesses et appliquer à chacune d'elles une force extérieure capable de la mettre en équilibre, on n'obtiendrait ainsi qu'un *équilibre instable*. Dans le système atomique correspondant, les trois paramètres physiques seraient *négatifs* en chaque point. Au moindre trouble apporté par une cause accidentelle, les positions primitives des atomes deviendraient comme des foyers répulsifs. La *force expansive* du gaz apparaîtrait aussitôt.

9. *Phénomènes calorifiques.* — Considérons maintenant un corps, tel que le plomb, solide à la température ordinaire, et soumettons-le à l'action d'une chaleur croissante. Les paramètres physiques sont, au début, positifs en chaque point. A mesure que le corps se dilate, ils vont en décroissant, et la solidité diminue. Bientôt ces paramètres deviennent assez faibles pour que le métal prenne un état quasi-liquide. Dès qu'un certain nombre d'entre eux passent au négatif, des vapeurs commencent à se dégager.

Les changements d'état des corps sous l'action du calorique se présentent ainsi comme la conséquence directe des déformations graduelles qu'ils subissent. Il n'est donc pas nécessaire, comme on l'a cru souvent, pour expliquer ces phénomènes, d'attribuer une forme compliquée, et par suite invraisemblable, aux expressions analytiques des actions à distance. Notre explication repose simplement sur les lois incontestables de la continuité, sans rien conjecturer sur la nature des forces moléculaires.

10. *Mouvements infinitésimaux.* — Supposons qu'après avoir écarté

le point m infiniment peu de sa position primitive O, on l'abandonne à lui-même en lui imprimant une vitesse initiale quelconque, un phénomène de mouvement prendra naissance. Tant que le rayon vecteur Om restera infinitésimal relativement aux distances atomiques, les lois du mouvement seront exprimées par les équations différentielles

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{H}x, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\mathrm{K}y, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\mathrm{L}z. \end{cases}$$

Considérons la première en particulier.

Si l'on a $\mathrm{H} > 0$, l'intégration donne

$$(13)\quad x = \mu \sin t\sqrt{\mathrm{H}} + \nu \cos t\sqrt{\mathrm{H}},$$

μ et ν désignant deux constantes arbitraires déterminées par les conditions initiales du mouvement. La projection du mobile sur l'axe des x exécute alors une oscillation dont la période est $\frac{2\pi}{\sqrt{\mathrm{H}}}$.

Dans l'hypothèse $\mathrm{H} < 0$, on a

$$(14)\quad x = \mu e^{t\sqrt{-\mathrm{H}}} + \nu e^{-t\sqrt{-\mathrm{H}}}.$$

La projection du rayon vecteur Om sur l'axe des x finit par croître sans limite assignable.

Si H est très-voisin de zéro, quel que soit son signe, on trouve simplement

$$(15)\quad x = \mu t + \nu;$$

en sorte que le mouvement projeté sur l'axe des x est rectiligne et uniforme.

La seconde et la troisième équation du groupe (12), étant de même forme que la première, donnent lieu à des intégrations analogues.

Cela posé, occupons-nous du mouvement effectif du mobile m.

Si les trois paramètres physiques sont positifs, le rayon vecteur Om admet un *maximum*. Les équations finies analogues à (13) s'appliquent indéfiniment au phénomène. Dans le cas particulier où l'on aurait

$$H = K = L,$$

il y aurait *oscillation* sur une droite déterminée. Plus généralement la trajectoire offre une infinité de points de rebroussement; elle va et vient dans divers sens en conservant une sorte d'affinité pour sa position primitive.

Si le signe négatif affecte un ou deux des paramètres, si encore il les affecte tous les trois, la trajectoire acquiert une branche infinie. Dans le premier cas, cette branche s'enroule autour d'une droite; dans le second cas, elle ondule de part et d'autre d'un plan; en dernier lieu, elle est comparable à la branche infinie d'une parabole gauche. Les équations différentielles (12) et, par suite, les équations finies correspondantes ne peuvent alors embrasser qu'une partie du phénomène réel. Dès que le rayon vecteur Om devient comparable aux distances atomiques, des lois nouvelles interviennent pour régir la suite du mouvement.

§ III. — *Les paramètres physiques.*

Sommaire : Mouvement rapporté à des axes quelconques. — Intégration. — Équation intégrante. — Détermination des paramètres physiques. — Formules. — Application. — Action pouvant donner lieu à des changements d'état physique.

1. *Mouvement rapporté à des axes quelconques.* — Supposons comme précédemment que tous les points d'un système atomique quelconque soient maintenus fixes, à l'exclusion d'un seul d'entre eux, m par exemple, de masse g, que nous regarderons comme un mobile. Appliquons à ce dernier une force extérieure, égale et contraire à l'action totale par laquelle il serait sollicité s'il occupait la position O. Donnons au mobile un déplacement infinitésimal, imprimons-lui une vitesse initiale et abandonnons-le ensuite à lui-même.

Prenant pour axes des coordonnées un système rectangulaire quel-

conque, désignons par x, y, z les coordonnées de l'écart au temps t. Le mouvement aura pour équations différentielles

$$(1)\quad \begin{cases} -\dfrac{d^2x}{dt^2} = Ax + Py + Rz, \\ -\dfrac{d^2y}{dt^2} = Px + By + Qz, \\ -\dfrac{d^2z}{dt^2} = Rx + Qy + Cz. \end{cases}$$

(Ces équations se déduisent immédiatement du groupe (16) de notre premier paragraphe, en y supprimant l'indice m, afin de simplifier les écritures.)

Les paramètres A, B, C, P, Q, R sont déterminés par la configuration géométrique du système donné, dans l'hypothèse où m occupe la position O.

Ils s'expriment au moyen du potentiel Φ, relatif à ce point, par les formules très-simples

$$(2)\quad \begin{cases} gA = -\dfrac{d^2\Phi}{dX^2}, \\ gB = -\dfrac{d^2\Phi}{dY^2}, \\ gC = -\dfrac{d^2\Phi}{dZ^2}, \\ gP = -\dfrac{d^2\Phi}{dX\,dY}, \\ gQ = -\dfrac{d^2\Phi}{dY\,dZ}, \\ gR = -\dfrac{d^2\Phi}{dZ\,dX}, \end{cases}$$

dans lesquelles X, Y, Z désignent les coordonnées du point O.

Proposons-nous d'intégrer les équations (1).

2. *Intégration des équations différentielles.* — A cet effet, nous rappellerons d'abord que l'équation différentielle

$$(3)\quad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -s\varepsilon$$

admet pour intégrale générale une des trois fonctions

$$(4)\qquad h \sin t\sqrt{s} + h' \cos t\sqrt{s},$$

$$(5)\qquad h e^{t\sqrt{-s}} + h' e^{-t\sqrt{-s}},$$

$$(6)\qquad ht + h',$$

dans lesquelles h et h' sont des constantes arbitraires. On doit choisir la première de ces fonctions si s est positif, la seconde si s est négatif, et la troisième si s est nul.

Désignons cette intégrale générale par le symbole

$$(7)\qquad (h, h'),$$

qui met en relief ses deux constantes arbitraires.

Cela posé, les équations (2) seront vérifiées par le système fini

$$(8)\qquad \begin{cases} x = (h, h'), \\ y = (k, k'), \\ z = (l, l'), \end{cases}$$

pourvu qu'on choisisse pour valeur de s une racine de l'équation du troisième degré

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} A - s & P & R \\ P & B - s & Q \\ R & Q & C - s \end{vmatrix} = 0,$$

et que, d'autre part, on assujettisse les six constantes h, h', k, k', l, l' à vérifier les deux systèmes d'équations linéaires

$$(10)\qquad \begin{cases} (A - s)h + Pk + Rl = 0, \\ Ph + (B - s)k + Ql = 0, \\ Rh + Qk + (C - s)l = 0, \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} (A - s)h' + Pk' + Rl' = 0, \\ Ph' + (B - s)k' + Ql' = 0, \\ Rh' + Qk' + (C - s)l' = 0, \end{cases}$$

qui déterminent quatre de ces constantes au moyen des deux autres.

Une seconde racine s_1 de la même équation (9) donnerait analoguement un nouveau système

$$(12)\qquad \begin{cases} x = (h_1, h'_1), \\ y = (k_1, k'_1), \\ z = (l_1, l'_1), \end{cases}$$

vérifiant les équations différentielles (1) et contenant deux constantes arbitraires.

La troisième racine s_2 de la même équation (9) donnerait enfin un troisième groupe

$$(13)\qquad \begin{cases} x = (h_2, h'_2), \\ y = (k_2, k'_2), \\ z = (l_2, l'_2), \end{cases}$$

contenant deux constantes arbitraires et formant une nouvelle solution particulière des équations (1).

Le groupe

$$(14)\qquad \begin{cases} x = (h, h') + (h_1, h'_1) + (h_2, h'_2), \\ y = (k, k') + (k_1, k'_1) + (k_2, k'_2), \\ z = (l, l') + (l_1, l'_1) + (l_2, l'_1), \end{cases}$$

contenant en dernière analyse six constantes arbitraires, résout le problème de l'intégration générale des équations (1). On obtient ainsi les équations finies du mouvement du point m; les six constantes arbitraires se déterminent d'après les conditions initiales du mouvement (déplacement et vitesse au temps zéro).

3. *Équation intégrante.* — L'équation (9), qui nous a servi à opérer l'intégration, mérite une étude particulière.

Son premier membre, représenté par un déterminant symétrique, affecte une forme bien connue dans la théorie des déterminants. On sait, d'après les travaux de Cauchy, Borchardt et Sylvester, que *cette équation admet trois racines réelles*.

Désignons par

(15) $$\Delta = \begin{vmatrix} A & P & R \\ P & B & Q \\ R & Q & C \end{vmatrix}$$

ce que devient le premier membre de l'équation (9) lorsqu'on y fait $s = 0$.

Nous pourrons mettre cette équation sous la forme

(16) $$s^3 - (A + B + C)s^2 + (P^2 + Q^2 + R^2 - AB - BC - CA)s - \Delta = 0.$$

4. *Détermination des paramètres physiques.* — Si l'on substituait aux axes rectangulaires des coordonnées auxquels sont rapportées les équations (14) (en supposant qu'on ait déterminé les dix-huit constantes h, k, l, etc.), un autre système rectangulaire, les coordonnées x, y, z s'exprimeraient par des fonctions linéaires des nouvelles coordonnées x', y', z'. Opérant la substitution dans le groupe (14) et résolvant ensuite par rapport à x', y', z', on arriverait à un groupe d'équations de même forme.

Il résulte de cette observation que les trois racines de l'équation intégrante (9) sont indépendantes des axes des coordonnées. On peut donc, pour déterminer ces racines, choisir indifféremment tel ou tel système d'axes. Or, si l'on choisit en particulier celui des *axes principaux* relatifs au point O, position primitive de l'atome m, on a, d'une part,

(17) $$P = Q = R = 0,$$

et, d'autre part,

(18) $$\begin{cases} A = H, \\ B = K, \\ C = L, \end{cases}$$

H, K, L désignant les *paramètres physiques* de m.

L'équation (9) prend alors la forme très-simple

(19) $$(s - H)(s - K)(s - L) = 0,$$

et l'on voit ainsi que *l'équation intégrante admet pour racines les trois paramètres physiques.*

Il suffit donc, pour calculer ces paramètres, de former l'équation (9) pour des axes de coordonnées rectangulaires quelconques, et de la résoudre par rapport à s.

Ces trois paramètres sont toujours réels.

Les racines de l'équation intégrante étant indépendantes des axes des coordonnées, il en est de même des coefficients de cette équation, c'est-à-dire des trois fonctions

$$A + B + C,$$

$$P^2 + Q^2 + R^2 - AB - BC - CA,$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & P & R \\ P & B & Q \\ R & Q & C \end{vmatrix}$$

formées au moyen des six dérivées secondes du potentiel Φ.

3. *Formules.* — Nous avons donné, dans notre premier paragraphe, les expressions générales des A, B, C, P, Q, R. Ces expressions se simplifient si, au lieu de prendre un point quelconque pour origine des coordonnées, on place cette origine au point O, position d'équilibre de l'atome m.

Soit, dans cette hypothèse, g_n la masse d'un autre atome quelconque n, ρ la distance On, (α, β, γ) les coordonnées du point n, et

$$g_m g_n f(\rho)$$

l'action exercée sur n par m, lorsque ce dernier atome est placé en O. On a alors

$$(20)\quad \begin{cases} A = \Sigma_n g_n [\alpha^2 \rho f'(\rho) + (\rho^2 - \alpha^2) f(\rho)] \dfrac{1}{\rho^3}, \\ B = \Sigma_n g_n [\beta^2 \rho f'(\rho) + (\rho^2 - \beta^2) f(\rho)] \dfrac{1}{\rho^3}, \\ C = \Sigma_n g_n [\gamma^2 \rho f'(\rho) + (\rho^2 - \gamma^2) f(\rho)] \dfrac{1}{\rho^3}, \end{cases}$$

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \Sigma_n g_n [\rho f'(\rho) - f(\rho)]\, \frac{\alpha\beta}{\rho^3}, \\ Q &= \Sigma_n g_n [\rho f'(\rho) - f(\rho)]\, \frac{\beta\gamma}{\rho^3}, \\ R &= \Sigma_n g_n [\rho f'(\rho) - f(\rho)]\, \frac{\gamma\alpha}{\rho^3}. \end{aligned}\right.$$

6. *Application.* — Pour faire une application immédiate de ces formules, supposons qu'on ait

$$(22)\qquad f(\rho) = \pm \rho^a,$$

l'exposant a désignant une quantité réelle, de grandeur et de signe quelconques.

Il vient alors

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= \pm\, \Sigma_n g_n \rho^{a-3} [a\alpha^2 + (\rho^2 - \alpha^2)], \\ B &= \pm\, \Sigma_n g_n \rho^{a-3} [a\beta^2 + (\rho^2 - \beta^2)], \\ C &= \pm\, \Sigma_n g_n \rho^{a-3} [a\gamma^2 + (\rho^2 - \gamma^2)], \end{aligned}\right.$$

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \pm\, (a-1)\, \Sigma_n g_n\, \alpha\beta\rho^{a-3}, \\ Q &= \pm\, (a-1)\, \Sigma_n g_n\, \beta\gamma\rho^{a-3}, \\ R &= \pm\, (a-1)\, \Sigma_n g_n\, \gamma\alpha\rho^{a-3}. \end{aligned}\right.$$

1° Supposons d'abord $a > 0$, de manière que *l'action soit proportionnelle à une puissance quelconque de la distance.*

Si cette action est *attractive* (signe + des formules), A, B, C sont toujours *positifs*, quelle que soit la configuration du système atomique, quelles que soient aussi les masses de ses points. Il en est de même des paramètres physiques H, K, L qui sont des valeurs particulières de A, B, C. Par conséquent, il y a toujours *équilibre stable*.

Si l'action est *répulsive* (signe — des formules), les paramètres physiques H, K, L sont négatifs; il y a toujours *équilibre instable*.

2° Supposons maintenant $a > 0$, de manière que *l'action soit inversement proportionnelle à une puissance quelconque de la distance.*

En ajoutant membre à membre les trois formules (23), on trouve

$$(25)\qquad A + B + C = H + K + L = \pm\, (a+2)\, \Sigma_n g_n \rho^{a-2}.$$

La somme $(H + K + L)$ prend donc le signe de l'expression

$$\pm (a + 2).$$

Elle est *négative*, soit *si l'action est attractive* (signe +) *et inversement proportionnelle à une puissance inférieure à* 2, soit encore *si cette action est répulsive* (signe —) *et inversement proportionnelle à une puissance supérieure à* 2.

Un au moins des trois paramètres physiques étant alors négatif, *l'équilibre ne peut pas être stable.*

3° Dans le cas particulier où $a = -2$, la somme $(H + K + L)$ est identiquement nulle.

L'action atomique est alors *une attraction ou une répulsion inversement proportionnelle au carré de la distance.*

Les signes + et — apparaissent nécessairement tous les deux dans le groupe des paramètres physiques. *L'équilibre stable est encore impossible.*

7. *Actions pouvant donner lieu à des changements d'état physique.* — Du moment où une hypothèse faite sur l'action à distance exclut la possibilité d'un équilibre stable ou celle d'un équilibre instable dans un système atomique (quelle que soit la figure géométrique de ce système), on doit regarder cette hypothèse comme inadmissible dans les recherches mathématiques sur la constitution des corps naturels, lesquels peuvent passer de l'état solide à l'état gazeux.

Si donc on voulait essayer l'explication des phénomènes physiques en admettant une action à distance comprise dans la forme générale

$$\pm \rho^a,$$

il faudrait, d'après les observations précédentes, rejeter toute hypothèse non comprise dans celle d'une *attraction inversement proportionnelle à une puissance supérieure à* 2 ou dans celle d'une *répulsion inversement proportionnelle à une puissance inférieure à* 2.

D'autres considérations analytiques que nous n'entrevoyons pas permettraient peut-être de restreindre plus encore le champ des hypothèses.

§ IV. — *Efforts engendrés par une déformation infinitésimale.*

Sommaire : Rappel de formules. — Nouvelles notations. — Système d'équations linéaires. — Propriétés du déterminant. — Forme symétrique. — Équations différentielles. — Intégration générale. — Réalité des racines s.

1. *Rappel de formules.* — Reprenant les notations adoptées dans notre premier paragraphe, nous pourrons représenter l'effort total engendré au point m, par suite d'une déformation infinitésimale quelconque du système atomique, par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} u_m = \Sigma_n (X_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} x_{n,m}), \\ v_m = \Sigma_n (Y_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} y_{n,m}), \\ w_m = \Sigma_n (Z_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} z_{n,m}), \end{cases}$$

dans lesquelles

$$(2)\quad \begin{cases} X_{n,m} = X_n - X_m, \\ Y_{n,m} = Y_n - Y_m, \\ Z_{n,m} = Z_n - Z_m, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x_{n,m} = x_n - x_m, \\ y_{n,m} = y_n - y_m, \\ z_{n,m} = z_n - z_m, \end{cases}$$

$$(4)\quad r_{m,n} = \frac{X_{n,m}}{R_{m,n}} x_{n,m} + \frac{Y_{n,m}}{R_{m,n}} y_{n,m} + \frac{Z_{n,m}}{R_{m,n}} z_{n,m},$$

$$(5)\quad R_{m,n} = \sqrt{X^2_{m,n} + Y^2_{m,n} + Z^2_{m,n}},$$

$$(6)\quad F_{m,n} = \frac{1}{R_{m,n}} g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n}).$$

2. *Nouvelles notations.* — Afin de simplifier les écritures qui vont

suivre, nous poserons

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{X^2_{m,n}}{R_{n,m}} F'_{m,n} + F_{m,n} = g_m\, a_{m,n}, \\ \dfrac{Y^2_{m,n}}{R_{n,m}} F'_{m,n} + F_{m,n} = g_m\, b_{m,n}, \\ \dfrac{Z^2_{m,n}}{R_{n,m}} F'_{m,n} + F_{m,n} = g_m\, c_{m,n}, \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{X_{n,m} Y_{n,m}}{R_{n,m}} F'_{m,n} = g_m\, \alpha_{m,n}, \\ \dfrac{Y_{n,m} Z_{n,m}}{R_{n,m}} F'_{m,n} = g_m\, \beta_{m,n}, \\ \dfrac{Z_{n,m} X_{n,m}}{R_{n,m}} F'_{m,n} = g_m\, \gamma_{m,n}. \end{cases}$$

Les fonctions que nous avons désignées par les lettres A_m, B_m, C_m et P_m, Q_m, R_m auront pour valeurs

$$(9)\qquad \begin{cases} A_m = \Sigma_n\, a_{m,n}, \\ B_m = \Sigma_n\, b_{m,n}, \\ C_m = \Sigma_n\, c_{m,n}. \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} P_m = \Sigma_n\, \alpha_{m,n}, \\ Q_m = \Sigma_n\, \beta_{m,n}, \\ R_m = \Sigma_n\, \gamma_{m,n}. \end{cases}$$

Grâce à ces conventions, le groupe des équations (1) pourra s'écrire

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_m}{g_m} = -A_m x_m + \Sigma_n a_{m,n} x_n - P_m y_m + \Sigma_n \alpha_{m,n} y_n - R_m z_m + \Sigma_n \gamma_{m,n} z_n, \\ \dfrac{v_m}{g_m} = -P_m x_m + \Sigma_n \alpha_{m,n} x_n - B_m y_m + \Sigma_n b_{m,n} y_n - Q_m z_m + \Sigma_n \beta_{m,n} z_n, \\ \dfrac{w_m}{g_m} = -R_m x_m + \Sigma_n \gamma_{m,n} x_n - Q_m y_m + \Sigma_n \beta_{m,n} y_n - C_m z_m + \Sigma_n c_{m,n} z_n. \end{cases}$$

5. *Système d'équations.* — Des équations analogues existent pour chaque point du système atomique. En les écrivant pour tous les

points au nombre de N, on forme le système de 3N équations linéaires :

$$
(12)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{u_1}{g_1} &= -A_1 x_1 + a_{1,2} x_2 + \ldots + a_{1,N} x_N - P_1 y_1 + \alpha_{1,2} y_2 + \ldots + \alpha_{1,N} y_N - R_1 z_1 + \gamma_{1,2} z_2 + \ldots + \gamma_{1,2} z_N,\\
\frac{u_2}{g_2} &= a_{2,1} x_1 - A_2 x_2 + \ldots + a_{2,N} x_N + \alpha_{2,1} y_1 - P_2 y_2 + \ldots + \alpha_{2,N} y_N + \gamma_{2,1} z_1 - R_2 z_2 + \ldots + \gamma_{2,N} z_N,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{u_N}{g_N} &= a_{N,1} x_1 + a_{N,2} x_2 + \ldots - A_N x_N + \alpha_{N,1} y_1 + \alpha_{N,2} y_2 + \ldots - P_N y_N + \gamma_{N,1} z_1 + \gamma_{N,2} z_2 + \ldots - R_N z_N;\\
\frac{v_1}{g_1} &= -P_1 x_1 + \alpha_{1,2} x_2 + \ldots + \alpha_{1,N} x_N - B_1 y_1 + b_{1,2} y_2 + \ldots + b_{1,N} y_N - Q_1 z_1 + \beta_{1,2} z_2 + \ldots + \beta_{1,N} z_N,\\
\frac{v_2}{g_2} &= \alpha_{2,1} x_1 - P_2 x_2 + \ldots + \alpha_{2,N} x_N + b_{2,1} y_1 - B_2 y_2 + \ldots + b_{2,N} y_N + \beta_{2,1} z_1 - Q_2 z_2 + \ldots + \beta_{2,N} z_N,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{v_N}{g_N} &= \alpha_{N,1} x_1 + \alpha_{N,2} x_2 + \ldots - P_N x_N + b_{N,1} y_1 + b_{N,2} y_2 + \ldots - B_N y_N + \beta_{N,1} z_1 + \beta_{N,2} z_2 + \ldots - Q_N z_N.\\
\frac{w_1}{g_1} &= -R_1 x_1 + \gamma_{1,2} x_2 + \ldots + \gamma_{1,N} x_N - Q_1 y_1 + \beta_{1,2} y_2 + \ldots + \beta_{1,N} y_N - C_1 z_1 + c_{1,2} z_2 + \ldots + c_{1,N} z_N,\\
\frac{w_2}{g_2} &= \gamma_{2,1} x_1 - R_2 x_2 + \ldots + \gamma_{2,N} x_N + \beta_{2,1} y_1 - Q_2 y_2 + \ldots + \beta_{2,N} y_N + c_{2,1} z_1 - C_2 z_2 + \ldots + c_{2,N} z_N,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{w_N}{g_N} &= \gamma_{N,1} x_1 + \gamma_{N,2} x_2 + \ldots - R_N x_N + \beta_{N,1} y_1 + \beta_{N,2} y_2 + \ldots - Q_N y_N + c_{N,1} z_1 + c_{N,2} z_2 + \ldots - C_N z_N.
\end{aligned}
\right.
$$

Les coefficients qui entrent dans les seconds membres de ces équations sont au nombre total de $9N^2$; mais on n'en compte que $6N^2$ distincts.

Il existe, entre ces $6N^2$ coefficients, 6N relations analogues à celles des groupes (9) et (10).

D'autre part, on trouve par les formules (7) et (8), et en vertu du principe d'égalité entre l'action et la réaction, pour deux points quelconques m et n, les relations symétriques

$$
(13)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&g_m a_{m,n} = g_n a_{n,m}, \quad g_m b_{m,n} = g_n b_{n,m}, \quad g_m c_{m,n} = g_n c_{n,m},\\
&g_m \alpha_{m,n} = g_n \alpha_{n,m}, \quad g_m \beta_{m,n} = g_n \beta_{n,m}, \quad g_m \gamma_{m,n} = g_n \gamma_{n,m}.
\end{aligned}
\right.
$$

Le nombre de ces relations, lorsqu'on fait varier m et n (indices inégaux) en les prenant de toutes les manières possibles dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N,$$

s'élève au total de $3N(N-1)$.

En résumé, il existe entre les $6N^2$ coefficients distincts des équations (12) un système de $3N(N+1)$ équations, permettant de déterminer $3N(N+1)$ de ces coefficients au moyen des $3N(N-1)$ autres.

4. *Propriétés du déterminant.* — Si l'on regardait les premiers membres des équations (12) comme des quantités connues et les projections de tous les déplacements comme des inconnues, on aurait un système de $3N$ équations du premier degré, dont nous désignerons le déterminant par le symbole $\mathfrak{D}$.

Ce déterminant est représenté par le tableau suivant, qui met en relief tous ses éléments :

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
-A_1 & a_{1,2} & \ldots & a_{1,N} & -P_1 & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,N} & -R_1 & \gamma_{1,2} & \ldots & \gamma_{1,N} \\
a_{2,1} & -A_2 & \ldots & a_{2,N} & \alpha_{2,1} & -P_2 & \ldots & \alpha_{2,N} & \gamma_{2,1} & -R_2 & \ldots & \gamma_{2,N} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{N,1} & a_{N,2} & \ldots & -A_N & \alpha_{N,1} & \alpha_{N,2} & \ldots & -P_N & \gamma_{N,1} & \gamma_{N,2} & \ldots & -R_N \\
\hline
-P_1 & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,N} & -B_1 & b_{1,2} & \ldots & b_{1,N} & -Q_1 & \beta_{1,2} & \ldots & \beta_{1,N} \\
\alpha_{2,1} & -P_2 & \ldots & \alpha_{2,N} & b_{2,1} & -B_2 & \ldots & b_{2,N} & \beta_{2,1} & -Q_2 & \ldots & \beta_{2,N} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{N,1} & \alpha_{N,2} & \ldots & -P_N & b_{N,1} & b_{N,2} & \ldots & -B_N & \beta_{N,1} & \beta_{N,2} & \ldots & Q_N \\
\hline
-R_1 & \gamma_{1,2} & \ldots & \gamma_{1,N} & -Q_1 & \beta_{1,2} & \ldots & \beta_{1,N} & -C_1 & c_{1,2} & \ldots & c_{1,N} \\
\gamma_{2,1} & -R_2 & \ldots & \gamma_{2,N} & \beta_{2,1} & -Q_2 & \ldots & \beta_{2,N} & c_{2,1} & -C_2 & \ldots & c_{2,N} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\gamma_{N,1} & \gamma_{N,2} & \ldots & -R_N & \beta_{N,1} & \beta_{N,2} & \ldots & -Q_N & c_{N,1} & c_{N,2} & \ldots & -C_N
\end{array}\right|$$

Les lignes à traits interrompus que nous avons figurées divisent ce tableau en neuf cases dans chacune desquelles se trouvent les éléments

d'un *déterminant partiel*. Ces derniers sont au nombre de six distincts; on peut représenter chacun d'eux par la lettre de ronde correspondant à celle qui entre dans les symboles de ses éléments principaux. On a ainsi les signes

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{C},\ \mathcal{P},\ \mathcal{Q},\ \mathcal{R},$$

et le déterminant $\mathfrak{D}$ peut s'écrire symboliquement

$$(14)\qquad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{P} & \mathcal{R} \\ \mathcal{P} & \mathcal{B} & \mathcal{Q} \\ \mathcal{R} & \mathcal{Q} & \mathcal{C} \end{vmatrix}.$$

Il est facile de voir que ce déterminant est nul, ou, en d'autres termes, que le système des équations (12) est indéterminé.

Supposons, en effet, que ces équations soient vérifiées par certaines valeurs des $x_1, x_2, \ldots, x_N$, des $y_1, y_2, \ldots, y_N$ et des $z_1, z_2, \ldots, z_N$. Elles le seront encore si l'on augmente tous les x d'une quantité arbitraire h, tous les y d'une autre quantité arbitraire k et tous les z d'une autre quantité arbitraire l, car cela revient à imprimer à tout le système atomique, après sa déformation, une simple translation (h, k, l), qui ne peut évidemment modifier ni les intensités ni les directions des efforts.

5. *Forme symétrique.* — Considérons en particulier le déterminant partiel

$$(15)\qquad \mathcal{A} = \begin{vmatrix} -A_1 & a_{1,2} & \ldots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & -A_2 & \ldots & a_{2,N} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \ldots & -A_N \end{vmatrix}.$$

Multiplions les éléments de la première ligne horizontale par $\sqrt{g_1}$, ceux de la deuxième par $\sqrt{g_2}, \ldots$, ceux de la $N^{\text{ième}}$ et dernière par $\sqrt{g_N}$.

Divisons ensuite les éléments de la première colonne verticale par $\sqrt{g_1}$, ceux de la deuxième par $\sqrt{g_2}, \ldots$, ceux de la $\mathrm{N}^{ième}$ et dernière par $\sqrt{g_{\mathrm{N}}}$.

Nous obtiendrons un nouveau déterminant

$$(16) \qquad \mathfrak{V} = \begin{vmatrix} -\mathrm{A}_1 & \sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\,a_{1,2} & \ldots & \sqrt{\frac{g_1}{g_{\mathrm{N}}}}\,a_{1\mathrm{N}} \\ \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\,a_{2,1} & -\mathrm{A}_2 & \ldots & \sqrt{\frac{g_2}{g_{\mathrm{N}}}}\,a_{2,\mathrm{N}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sqrt{\frac{g_{\mathrm{N}}}{g_1}}\,a_{\mathrm{N}1} & \sqrt{\frac{g_{\mathrm{N}}}{g_2}}\,a_{\mathrm{N},2} & \ldots & -\mathrm{A}_{\mathrm{N}} \end{vmatrix}.$$

Posons

$$(17) \qquad \Gamma = g_1 g_2 \ldots g_{\mathrm{N}}.$$

Par suite des multiplications opérées sur ses lignes horizontales le déterminant $\mathfrak{D}$ se trouve évidemment multiplié par Γ. Par suite des divisions opérées sur ses colonnes verticales, ce déterminant se trouve divisé par Γ. En dernière analyse, on n'a pas changé sa valeur; on a donc

$$(18) \qquad \mathfrak{V} = \mathfrak{D}.$$

Les tableaux (15) et (16) représentent deux manières équivalentes d'écrire le même déterminant; il est à remarquer que dans ces deux manières *les éléments principaux restent les mêmes*.

La forme $\mathfrak{V}$ est celle d'un déterminant *symétrique*. En effet, deux éléments symétriquement placés étant, généralement, $\sqrt{\frac{g_m}{g_n}}\,a_{m,n}$ et $\sqrt{\frac{g_n}{g_m}}\,a_{n,m}$, l'égalité de ces éléments

$$(19) \qquad \sqrt{\frac{g_m}{g_n}}\,a_{m,n} = \sqrt{\frac{g_n}{g_m}}\,a_{n,m}$$

équivaut à

$$g_m a_{m,n} = g_n a_{n,m}, \tag{20}$$

relation vraie d'après les formules (13).

Les autres déterminants partiels

$$\mathscr{M},\ \mathscr{S},\ \mathscr{L},\ \mathscr{Q},\ \mathscr{R}$$

peuvent être transformés de la même manière en déterminants symétriques

$$\mathfrak{M},\ \mathfrak{S},\ \mathfrak{H},\ \mathfrak{T},\ \mathfrak{V},$$

sans qu'il y ait altération des éléments principaux.

Formant avec les déterminants partiels ainsi transformés un assemblage analogue à celui qu'indique la formule (14), nous aurons

$$\boldsymbol{\mathfrak{C}} = \begin{vmatrix} \mathfrak{P} & \mathfrak{H} & \mathfrak{V} \\ \mathfrak{H} & \mathfrak{M} & \mathfrak{T} \\ \mathfrak{V} & \mathfrak{T} & \mathfrak{S} \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Le déterminant $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ ainsi défini est évidemment *symétrique*. Il a *les mêmes éléments principaux* que le déterminant $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$. Nous allons prouver en outre que

$$\boldsymbol{\mathfrak{C}} = \boldsymbol{\mathfrak{D}}. \tag{22}$$

En effet, pour obtenir $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$, il est nécessaire et suffisant d'opérer sur $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ les opérations suivantes :

1° Multiplier par $\sqrt{g_1}$ les éléments de la 1re, de la $(N+1)^{\text{ième}}$ et de la $(2N+1)^{\text{ième}}$ ligne horizontale ; par $\sqrt{g_2}$ les éléments de la 2e, de la $(N+2)^{\text{ième}}$ et de la $(2N+2)^{\text{ième}}$ ligne,... ; par $\sqrt{g_N}$ les éléments de la $N^{\text{ième}}$, de la $2N^{\text{ième}}$ et de la $3N^{\text{ième}}$ ligne ;

2° Diviser par $\sqrt{g_1}$ les éléments de la 1re, de la $(N+1)^{\text{ième}}$ et de la

$(2N+1)^{ième}$ colonne verticale; par $\sqrt{g_2}$ les éléments de la 2e, de la $(N+2)^{ième}$ et de la $(2N+2)^{ième}$ colonne,...; par $\sqrt{g_N}$ les éléments de la $N^{ième}$, de la $2N^{ième}$ et de la $3N^{ième}$ colonne.

Les multiplications par lignes horizontales ont pour résultat de multiplier $\mathfrak{D}$ par le facteur Γ^3; les divisions par colonnes verticales divisent ce déterminant par le même facteur. De cette compensation résulte l'égalité (22) qu'il fallait démontrer.

6. *Équations différentielles.* — Imaginons qu'on applique à l'atome m une force capable d'équilibrer l'action totale par laquelle il se trouve sollicité lorsqu'il occupe sa position primitive. Déplaçons cet atome infiniment peu, imprimons-lui une vitesse initiale quelconque, et abandonnons-le à lui-même.

Supposons qu'on en fasse autant pour tous les autres atomes à un même instant que nous prendrons pour origine du temps t.

Un phénomène de mouvement prendra naissance. Tant que les écarts atomiques resteront infinitésimaux relativement aux distances séparatives, le mouvement sera régi par les équations différentielles linéaires simultanées qu'on obtient, en remplaçant dans les équations (12) les premiers membres,

$$\frac{u_1}{g_1},\quad \frac{u_2}{g_2},\ \dots,\quad \frac{u_N}{g_N},$$
$$\frac{v_1}{g_1},\quad \frac{v_2}{g_2},\ \dots,\quad \frac{v_N}{g_N},$$
$$\frac{w_1}{g_1},\quad \frac{w_2}{g_2},\ \dots,\quad \frac{w_N}{g_N}.$$

par les dérivées secondes correspondantes :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2},\quad \frac{d^2x_2}{dt^2},\ \dots,\quad \frac{d^2x_N}{dt^2},$$
$$\frac{d^2y_1}{dt^2},\quad \frac{d^2y_2}{dt^2},\ \dots,\quad \frac{d^2y_N}{dt^2},$$
$$\frac{d^2z_1}{dt^2},\quad \frac{d^2z_2}{dt^2},\ \dots,\quad \frac{d^2z_N}{dt^2}.$$

Nous écrirons ces équations symboliquement sous la forme

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d^2x_1}{dt^2}=(x,y,z)_1, & \dfrac{d^2y_1}{dt^2}=((x,y,z))_1, & \dfrac{d^2z_1}{dt^2}=(((x,y,z)))_1, \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2}=(x,y,z)_2, & \dfrac{d^2y_2}{dt^2}=((x,y,z))_2, & \dfrac{d^2z_2}{dt^2}=(((x,y,z)))_2, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \dfrac{d^2x_N}{dt^2}=(x,y,z)_N, & \dfrac{d^2y_N}{dt^2}=((x,y,z))_N, & \dfrac{d^2z_N}{dt^2}=(((x,y,z)))_N. \end{array}\right.$$

Il s'agit de les intégrer.

7. *Intégration particulière.* — A cet effet, nous désignerons par le symbole

$$\nu,\ \nu'$$

l'intégrale générale de l'équation

$$(24)\qquad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}=-s\varepsilon,$$

ν et ν' étant les deux constantes arbitraires de cette intégrale, qui peut prendre, comme on sait, trois formes analytiques différentes, suivant que s est positif, nul ou négatif.

Le système (23) admettra l'intégration particulière

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{lll} x_1=h_1,h'_1, & y_1=k_1,k'_1, & z_1=l_1,l'_1, \\ x_2=h_2,h'_2, & y_2=k_2,k'_2, & z_2=l_2,l'_2, \\ \dots\dots, & \dots\dots, & \dots\dots, \\ x_N=h_N,h'_N, & y_N=k_N,k'_N, & z_N=l_N,l'_N, \end{array}\right.$$

pourvu que, d'une part, on prenne pour valeur de s une racine de l'équation

$$(26)\qquad \mathfrak{D}_s=0,$$

($\mathfrak{D}_s$ désignant ce que devient le déterminant $\mathfrak{D}$ lorsqu'on ajoute s à chacun de ses éléments principaux), et que, d'autre part, on assu-

jettisse les constantes h, k, l, h', k', l' à vérifier les deux systèmes d'équations linéaires :

$$(27)\quad \begin{cases} -sh_1 = (h, k, l)_1, & -sk_1 = ((h, k, l))_1, & -sl_1 = (((h, k, l)))_1, \\ -sh_2 = (h, k, l)_2, & -sk_2 = ((h, k, l))_2, & -sl_2 = (((h, k, l)))_2, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ -sh_N = (h, k, l)_N, & -sk_N = ((h, k, l))_N, & -sl_N = (((h, k, l)))_N; \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} -sh'_1 = (h', k', l')_1, & -sk'_1 = ((h', k', l'))_1, & -sl'_1 = (((h', k', l')))_1, \\ -sh'_2 = (h', k', l')_2, & -sk'_2 = ((h', k', l'))_2, & -sl'_2 = (((h', k', l')))_2, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ -sh'_N = (h', k', l')_N, & -sk'_N = ((h', k', l'))_N, & -sl'_N = (((h', k', l')))_N, \end{cases}$$

respectivement déduits du système (23), en remplaçant, d'une part, les lettres x, y, z d'abord par h, k, l, puis par h', k', l'; et, d'autre part, les symboles $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ d'abord par $-sh$, $-sk$, $-sl$, puis par $-sh'$, $-sk'$, $-sl'$.

Les 3N équations linéaires dont se compose le système (27) sont homogènes; l'équation (26) exprime que leur déterminant est nul. Ces équations déterminent donc (3N − 1) constantes au moyen de la $N^{ième}$.

Une observation analogue s'applique au système (28).

Par conséquent le système (25), intégration particulière du système (23), contient, en dernière analyse, *deux constantes arbitraires*.

8. *Intégration générale.* — L'équation (26) étant du degré 3N, admet pour racines 3N valeurs de l'inconnue s.

Chacune de ces valeurs fournit une intégration particulière analogue à (25), et deux groupes conditionnels analogues à (27) et (28) entre les constantes qui se trouvent réduites à deux arbitraires.

La sommation des intégrales particulières donne le système

$$(29)\quad \begin{cases} x_1 = \mathrm{S}h_1, h'_1, & y_1 = \mathrm{S}k_1, k'_1, & z_1 = \mathrm{S}l_1, l'_1, \\ x_2 = \mathrm{S}h_2, h'_2, & y_2 = \mathrm{S}k_1, k'_2, & z_2 = \mathrm{S}l_2, l'_1, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x_N = \mathrm{S}h_N, h'_N, & y_N = \mathrm{S}h_N, k'_N, & z_N = \mathrm{S}l_N, l'_N, \end{cases}$$

contenant en dernière analyse 6N *constantes arbitraires* et représentant l'intégration générale du système (23).

Ces 6N constantes arbitraires pourraient se déterminer d'après les conditions initiales du mouvement, lesquelles sont également au nombre de 6N (savoir : les projections des déplacements et des vitesses au temps zéro pour tous les points du système atomique).

9. *Réalité des racines s.* — L'identité (22) entraîne évidemment la suivante :

(30) $$\mathfrak{C}_s = \mathfrak{D}_s,$$

$\mathfrak{C}_s$ désignant ce que devient $\mathfrak{C}$ quant on ajoute s à chacun de ses éléments principaux.

Il en résulte que l'équation (26) peut s'écrire

(31) $$\mathfrak{C}_s = 0.$$

Le premier membre étant alors un déterminant symétrique, il s'ensuit que *toutes les racines de l'équation sont réelles.*

Nous donnerons à ces racines le nom de *paramètres dynamiques* du système matériel.

§ V. — *Les paramètres dynamiques.*

Sommaire : Nullité de trois racines s. — Intégration correspondante. — Interprétation cinématique. — Équation simplifiée. — Cas particulier. — Formule d'analyse. — Considérations générales. — Vibrations calorifiques.

1. *Nullité de trois racines s.* — On reconnaît aisément que le déterminant $\mathfrak{D}_s$ (obtenu en ajoutant s à chacun des éléments principaux du déterminant $\mathfrak{D}$) est divisible par s^3.

Ajoutons à la première colonne verticale les (N — 1) colonnes suivantes, en tenant compte des formules

$$A_m = \Sigma_n a_{m,n},$$
$$P_m = \Sigma_n \alpha_{m,n},$$
$$R_m = \Sigma_n \gamma_{m,n};$$

la nouvelle colonne ainsi obtenue sera composée de termes tous égaux à s.

Ajoutons de même à la $(N+1)^{ième}$ colonne verticale les $(N-1)$ colonnes suivantes, en tenant compte des formules

$$P_m = \Sigma_n \alpha_{m,n},$$
$$B_m = \Sigma_n b_{m,n},$$
$$Q_m = \Sigma_n \beta_{m,n};$$

tous les termes de cette colonne deviendront égaux à s.

Ajoutons enfin à la $(2N+1)^{ième}$ colonne verticale les $(N-1)$ dernières colonnes, en tenant compte des formules

$$R_m = \Sigma_n \gamma_{m,n},$$
$$Q_m = \Sigma_n \beta_{m,n},$$
$$C_m = \Sigma_n c_{m,n};$$

nous rendrons encore tous les termes égaux à s.

$\mathfrak{D}_s$ est donc divisible par s^3, et par conséquent l'équation

$$\mathfrak{D}_s = 0,$$

du degré $3N$, a nécessairement trois racines nulles.

2. *Intégration correspondante.* — Lorsque $s=0$, l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -s\varepsilon$$

se réduit à

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = 0,$$

et admet pour intégrale

$$\varepsilon = \nu t + \nu',$$

ν et ν' étant deux constantes arbitraires.

Par conséquent, les trois racines nulles de l'équation

$$\mathfrak{D}_s = 0 \tag{1}$$

ont pour effet d'introduire dans le second membre de chacune des équations intégrales (29) du paragraphe précédent un binôme linéaire

en t, et de réduire à $3(N-1)$ le nombre des autres termes binômes (exponentiels ou trigonométriques) résultant des autres racines de l'équation (1).

A cette triple racine nulle correspond l'intégration particulière

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{lll} x_1 = h_1 t + h'_1, & y_1 = k_1 t + k'_1, & z_1 = l_1 t + l'_1, \\ x_2 = h_2 t + h'_2, & y_2 = k_2 t + k'_2, & z_2 = l_2 t + l'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_N = h_N t + h'_N, & y_N = k_N t + k'_N, & z_N = l_N t + l'_N, \end{array}\right.$$

du système différentiel (23), § IV.

Les constantes h, k, l, au nombre de $3N$, doivent vérifier les équations linéaires homogènes.

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l} -A_1 h_1 + a_{1,2} h_2 + \ldots + a_{1,N} h_N - P_1 k_1 + \alpha_{1,2} k_2 + \ldots + \alpha_{1,N} k_N - R_1 l_1 + \gamma_{1,2} l_2 + \ldots + \gamma_{1,N} l_N = 0, \\ a_{2,1} h_1 - A_2 h_2 + \ldots + a_{2,N} h_N + \alpha_{2,1} k_1 - P_2 k_2 + \ldots + \alpha_{2,N} k_N + \gamma_{2,1} l_1 - R_2 l_2 + \ldots + \gamma_{2,N} l_N = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{N,1} h_1 + a_{N,2} h_2 + \ldots - A_N h_N + \alpha_{N,1} k_1 + \alpha_{N,2} k_2 + \ldots - P_N k_N + \gamma_{N,1} l_1 + \gamma_{N,2} l_2 + \ldots - R_N l_N = 0; \\ -P_1 h_1 + \alpha_{1,2} h_2 + \ldots + \alpha_{1,N} h_N - B_1 k_1 + b_{1,2} k_2 + \ldots + b_{1,N} k_N - Q_1 l_1 + \beta_{1,2} l_2 + \ldots + \beta_{1,N} l_N = 0. \\ a_{2,1} h_1 - P_2 h_2 + \ldots + \alpha_{2,N} h_N + b_{2,1} k_1 - B_2 k_2 + \ldots + b_{2,N} k_N + \beta_{2,1} l_1 - Q_2 l_2 + \ldots + \beta_{2,N} l_N = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{N,1} h_1 + \alpha_{N,2} h_2 + \ldots - P_N h_N + b_{N,1} k_1 + b_{N,2} k_2 + \ldots - B_N k_N + \beta_{N,1} l_1 + \beta_{N,2} l_2 + \ldots - Q_N l_N = 0; \\ -R_1 h_1 + \gamma_{1,2} h_2 + \ldots + \gamma_{1,N} h_N - Q_1 k_1 + \beta_{1,2} k_2 + \ldots + \beta_{1,N} k_N - C_1 l_1 + c_{1,2} l_2 + \ldots + c_{1,N} l_N = 0. \\ \gamma_{2,1} h_1 - R_2 h_2 + \ldots + \gamma_{2,N} h_N + \beta_{2,1} k_1 - Q_2 k_2 + \ldots + \beta_{2,N} k_N + c_{2,1} l_1 - C_2 l_2 + \ldots + c_{2,N} l_N = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{N,1} h_1 + \gamma_{N,2} h_2 + \ldots - R_N h_N + \beta_{N,1} k_1 + \beta_{N,2} k_2 + \ldots - Q_N k_N + c_{N,1} l_1 + c_{N,2} l_2 + \ldots - C_N l_N = 0. \end{array}\right.$$

Les constantes h', k', l', également au nombre de $3N$, doivent vérifier un système d'équations tout à fait semblable qu'on déduirait du précédent, en ajoutant simplement un accent à chacune des lettres h, k, l, et que nous désignons par (4).

Les systèmes (3) et (4) admettent le même *résultant*, identique avec le déterminant que nous avons désigné par $\mathfrak{D}$.

$\mathfrak{D}$ est égal à ce que devient $\mathfrak{D}_s$ pour $s = 0$. Or $\mathfrak{D}_s$ est divisible par s^3; donc $\mathfrak{D}$ est nul au troisième ordre. Il en résulte que les équations (3) se réduisent à $3(N-1)$ distinctes, et qu'il en est de même des équations (4).

En tenant compte des équations

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} A_m &= \Sigma_n a_{m,n},\\ B_m &= \Sigma_n b_{m,n},\\ C_m &= \Sigma_n c_{m,n},\\ P_m &= \Sigma_n \alpha_{m,n},\\ Q_m &= \Sigma_n \beta_{m,n},\\ R_m &= \Sigma_n \gamma_{m,n},\end{aligned}\right.$$

on voit que le système (3) est satisfait en posant

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} h_1 &= h_2 = \ldots = h_N,\\ k_1 &= k_2 = \ldots = k_N,\\ l_1 &= l_2 = \ldots = l_N.\end{aligned}\right.$$

Or ce nouveau système se réduit aussi à $3(N-1)$ équations distinctes; il est donc équivalent à (3).

De même, le système (4) est satisfait en posant

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} h'_1 &= h'_2 = \ldots = h'_N,\\ k'_1 &= k'_2 = \ldots = k'_N,\\ l'_1 &= l'_2 = \ldots = l'_N.\end{aligned}\right.$$

Ce nouveau système, se réduisant à $3(N-1)$ équations distinctes, est équivalent à (4).

D'après cela, l'intégration particulière (2) se réduit à la forme très-simple

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x_2 = \ldots = x_N = ht + h',\\ y_1 &= y_2 = \ldots = y_N = kt + k',\\ z_1 &= z_2 = \ldots = z_N = lt + l',\end{aligned}\right.$$

qui met en évidence les six constantes arbitaires h, k, l, h', k', l'.

Interprétation cinématique. — Les paramètres h, k, l sont évidemment les trois projections de la vitesse d'un mouvement rectiligne et uniforme qui vient animer tous les atomes du système.

Les vitesses initiales simultanément imprimées par hypothèse à ces divers atomes peuvent être regardées comme résultant d'impulsions égales en durée, mais différentes en grandeur et en direction. Transportons par la pensée toutes ces impulsions au centre de gravité du système atomique et composons-les afin d'obtenir leur résultante. Si l'on regardait ce centre de gravité comme un point matériel libre sur lequel serait condensée la masse totale du système (ou, en d'autres termes, la somme des masses atomiques), l'impulsion résultante dont nous parlons lui communiquerait une vitesse déterminée en grandeur et en direction. Cette vitesse doit évidemment être identique avec celles que représentent les trois projections h, k, l.

D'après cela, soient η_m, $\varkappa_m$, λ_m les trois projections de la vitesse initiale de l'atome m dont la masse est g_m; nous aurons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} h &= \frac{S_m g_m \eta_m}{S_m g_m},\\ k &= \frac{S_m g_m \varkappa_m}{S_m g_m},\\ l &= \frac{S_m g_m \lambda_m}{S_m g_m}.\end{aligned}\right.$$

Analoguement, en désignant par η'_m, $\varkappa'_m$, λ'_m les trois projections du déplacement initial de l'atome m, on aurait

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} h' &= \frac{S_m g_m \eta'_m}{S_m g_m},\\ k' &= \frac{S_m g_m \varkappa'_m}{S_m g_m},\\ l' &= \frac{S_m g_m \lambda'_m}{S_m g_m},\end{aligned}\right.$$

en sorte que h', k', l' sont les projections du déplacement initial subi par le centre de gravité du système atomique.

4. *Équation simplifiée.* — En dépouillant l'équation (1) de ses trois

racines nulles, on a

$$(11) \qquad \frac{1}{s^3}\mathfrak{D}_s = 0,$$

équation du degré $3(N-1)$ qui détermine $3(N-1)$ *paramètres dynamiques*, positifs ou négatifs.

Développée suivant les puissances croissantes de s, cette équation peut s'écrire

$$(12) \qquad s\Sigma\delta_{3N-3} + s^2\Sigma\delta_{3N-4} + \ldots + s^{3N-4}\Sigma\delta_1 + s^{3N-3} = 0,$$

le symbole δ_p désignant un déterminant partiel du degré p, formé au moyen de $\mathfrak{D}$, de façon que sa diagonale soit composée d'éléments appartenant à la diagonale de $\mathfrak{D}$, et $\Sigma\delta_p$ désignant la somme de tous les éléments partiels de ce genre, au nombre de

$$\frac{3N(3N-1)\ldots(3N-p+1)}{1.2\ldots p},$$

qui peuvent se déduire de $\mathfrak{D}$.

Si l'on changeait d'une manière quelconque les axes rectangulaires auxquels se rapportent les coordonnées atomiques, les équations intégrales du mouvement, représentées symboliquement par le groupe (29) du § IV, conserveraient leur forme analytique; les paramètres exponentiels ou trigonométriques qui figurent dans ces équations resteraient les mêmes. Par conséquent, *les paramètres dynamiques sont indépendants des axes des coordonnées.*

Il en résulte que les coefficients des diverses puissances de s dans l'équation (12) sont aussi indépendants des axes. Il en est de même des trois expressions identiquement nulles

$$\mathfrak{D}, \quad \Sigma\delta_{3N-1} \quad \text{et} \quad \Sigma\delta_{3N-2},$$

qui représenteraient, dans l'équation non simplifiée

$$\mathfrak{D}_s = 0,$$

le terme constant, le coefficient de s et celui de s^2.

5. *Cas particulier.* — Parmi toutes les hypothèses qu'il est possible de faire au sujet des fonctions

$$f_{m,n}(R_{m,n})$$

qui représentent les actions à distance, il en est une qui conduit à des calculs remarquablement simples, et c'est à ce titre que nous allons l'examiner. Posons

$$f_{m,n}(R_{m,n}) = K R_{m,n}, \tag{13}$$

ce qui revient à supposer *l'action atomique proportionnelle à la simple distance*.

Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} & F_{m,n} = K g_m g_n, \\ & F'_{m,n} = 0, \\ & a_{m,n} = b_{m,n} = c_{m,n} = K g_n, \\ & \alpha_{m,n} = \beta_{m,n} = \gamma_{m,n} = 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Posant

$$G = S_m g_m,$$

de façon que G désigne la somme des masses atomiques, nous pourrons écrire

$$\left\{\begin{aligned} & A_m = B_m = C_m = K(G - g_m), \\ & P_m = Q_m = R_m = 0. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Désignons enfin par (α, β, γ) les trois projections du déplacement infinitésimal subi au temps t par le centre de gravité du système atomique, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} & \alpha = \frac{S_m g_m x_m}{G}, \\ & \beta = \frac{S_m g_m y_m}{G}, \\ & \gamma = \frac{S_m g_m z_m}{G}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Au moyen de ces notations, les équations différentielles du mouve-

ment revêtiront la forme très-simple

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \mathrm{KG}(\alpha - x_1), & \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \mathrm{KG}(\alpha - x_2), \ldots, & \dfrac{d^2x_N}{dt^2} = \mathrm{KG}(\alpha - x_N), \\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \mathrm{KG}(\beta - y_1), & \dfrac{d^2y_2}{dt^2} = \mathrm{KG}(\beta - y_2), \ldots, & \dfrac{d^2y_N}{dt^2} = \mathrm{KG}(\beta - y_N), \\ \dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \mathrm{KG}(\gamma - z_1), & \dfrac{d^2z_2}{dt^2} = \mathrm{KG}(\gamma - z_2), \ldots, & \dfrac{d^2z_N}{dt^2} = \mathrm{KG}(\gamma - z_N). \end{cases}$$

Soient a_m, b_m, c_m les trois projections de la vitesse initiale de l'atome m, a'_m, b'_m, c'_m celles du déplacement initial de ce même point matériel, et supposons qu'on ait

$$(18)\qquad \mathrm{S}_m g_m a_m = \mathrm{S}_m g_m b_m = \mathrm{S}_m g_m c_m = 0,$$

$$(19)\qquad \mathrm{S}_m g_m a'_m = \mathrm{S}_m g_m b'_m = \mathrm{S}_m g_m c'_m = 0.$$

Le centre de gravité du système atomique n'éprouvera aucun dérangement initial et ne sera sollicité par aucune impulsion primitive. On aura donc constamment

$$(20)\qquad \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

en sorte que les équations (17) deviendront séparément intégrables.

Si K est positif, on trouve pour l'atome m les équations finies

$$(21)\quad \begin{cases} x_m = \dfrac{a_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}} \sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + a'_m \cos t\sqrt{\mathrm{KG}}, \\ y_m = \dfrac{b_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}} \sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + b'_m \cos t\sqrt{\mathrm{KG}}, \\ z_m = \dfrac{c_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}} \sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + c'_m \cos t\sqrt{\mathrm{KG}}. \end{cases}$$

Si K est négatif, on trouve pour équations finies du mouvement de ce même atome :

$$(22)\quad \begin{cases} x_m = \left(\dfrac{a_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + a'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\dfrac{a_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - a'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}}, \\ y_m = \left(\dfrac{b_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + b'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\dfrac{b_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - b'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}}, \\ z_m = \left(\dfrac{c_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + c'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\dfrac{c_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - c'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}}. \end{cases}$$

Les autres points donnent lieu à des équations analogues.

La forme (21), qui correspond à $K > 0$, figure un état vibratoire de période $\frac{2\pi}{\sqrt{KG}}$. Il y a pour ainsi dire *solidité* en chaque point du système.

La forme (22), qui correspond à $K < 0$, figure un état de mouvement dont la vitesse croît indéfiniment. Les atomes fuient leurs positions primitives. Il y a pour ainsi dire *gazéité* en chaque point.

Si l'on avait généralement

$$(23)\qquad \frac{a'_m}{a_m} = \frac{b'_m}{b_m} = \frac{c'_m}{c_m},$$

c'est-à-dire si les impulsions initiales tombaient sur les mêmes droites que les déplacements, les trajectoires seraient rectilignes.

Examinons maintenant le cas le plus général où les déplacements et les vitesses au temps zéro ne satisferaient à aucune équation conditionnelle.

Nous pourrons représenter les trois projections de la vitesse initiale au point m par $a_m + h$, $b_m + k$, $c_m + l$, h, k, l étant trois quantités arbitraires (les mêmes pour tous les atomes), et les a_m, b_m, c_m étant supposés satisfaire aux équations (18). Représentons de même les trois projections du déplacement initial en m par $a'_m + h'$, $b'_m + k$, $c'_m + l'$, h', k', l' étant trois paramètres quelconques (les mêmes pour tous les atomes), et les a'_m, b'_m, c'_m étant supposés satisfaire aux équations (19).

Il est clair que le mouvement du centre de gravité du système atomique sera représenté par les formules

$$(24)\qquad \begin{cases} \alpha = ht + h', \\ \beta = kt + k', \\ \gamma = lt + l', \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(25)\qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0.$$

Les équations (17) pourront alors s'écrire

$$
(26)\left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{d^2(x_1-\alpha)}{dt^2}=-\mathrm{KG}(x_1-\alpha), & \dfrac{d^2(y_1-\beta)}{dt^2}=-\mathrm{KG}(y_1-\beta), & \dfrac{d^2(z_1-\gamma)}{dt^2}=\quad \mathrm{KG}(z_1-\gamma),\\
\dfrac{d^2(x_2-\alpha)}{dt^2}=-\mathrm{KG}(x_2-\alpha), & \dfrac{d^2(y_2-\beta)}{dt^2}=-\mathrm{KG}(y_2-\beta), & \dfrac{d^2(z_2-\gamma)}{dt^2}=-\mathrm{KG}(z_2-\gamma),\\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots,\\
\dfrac{d^2(x_N-\alpha)}{dt^2}=-\mathrm{KG}(x_N-\alpha), & \dfrac{d^2(y_N-\beta)}{dt^2}=-\mathrm{KG}(y_N-\beta), & \dfrac{d^2(z_N-\gamma)}{dt^2}=-\mathrm{KG}(z_N-\gamma).
\end{array}
\right.
$$

Elles peuvent encore s'intégrer séparément au moyen d'un simple changement de variables. On trouve ainsi, en tenant compte des équations (24), pour le mouvement au point m :

1° Si $\mathrm{K} > 0$,

$$
(27)\left\{
\begin{aligned}
x_m &= ht + h' + \frac{a_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}}\sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + a'_m\cos t\sqrt{\mathrm{KG}},\\
y_m &= kt + k' + \frac{b_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}}\sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + b'_m\cos t\sqrt{\mathrm{KG}},\\
z_m &= lt + l' + \frac{c_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}}\sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + c'_m\cos t\sqrt{\mathrm{KG}};
\end{aligned}
\right.
$$

2° Si $\mathrm{K} < 0$,

$$
(28)\left\{
\begin{aligned}
x_m &= ht + h' + \left(\frac{a_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + a'_m\right)e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\frac{a_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - a'_m\right)e^{-t\sqrt{-\mathrm{KG}}},\\
y_m &= kt + k' + \left(\frac{b_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + b'_m\right)e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\frac{b_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - b'_m\right)e^{-t\sqrt{-\mathrm{KG}}},\\
z_m &= lt + l' + \left(\frac{c_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + c'_m\right)e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\frac{c_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - c'_m\right)e^{-t\sqrt{-\mathrm{KG}}};
\end{aligned}
\right.
$$

et de même pour les autres atomes.

Nous rencontrons ici les binômes algébriques et linéaires dont la présence est due aux trois racines nulles de l'équation en s. Les binômes trigonométriques ou exponentiels sont dus aux autres racines de cette équation; or ces binômes ne contiennent, comme base transcendante, que la seule expression KG; les racines dont il s'agit sont donc toutes égales entre elles et admettent KG pour valeur commune.

Ces observations montrent que l'équation générale

$$\mathfrak{D}_s = 0$$

se réduirait, dans le cas actuel, à la forme très-simple

$$(29) \qquad s^3(s - KG)^{3(N-1)} = 0.$$

6. *Formule d'analyse.* — De ce résultat découle une formule d'analyse que nous croyons nouvelle, et qui pourrait trouver quelques applications dans la théorie des nombres. Représentons par

$$g_1, g_2, \ldots, g_m, \ldots, g_N$$

des quantités quelconques. Désignons leur somme par G, et posons pour toute valeur de l'indice m

$$(30) \qquad G - g_m = G_m.$$

Formons le déterminant d'ordre N :

$$(31) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} -G_1+\varepsilon & g_2 & \ldots & g_m & \ldots & g_N \\ g_1 & -G_2+\varepsilon & \ldots & g_m & \ldots & g_N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_1 & g_2 & \ldots & -G_m+\varepsilon & \ldots & g_N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_m & \ldots & -G_N+\varepsilon \end{vmatrix},$$

dans lequel ε désigne un paramètre arbitraire. Nous aurons

$$(32) \qquad \Delta = \varepsilon(\varepsilon - G)^{N-1}.$$

7. *Considérations générales.* — Revenons maintenant à notre théorie générale, et abandonnons toute hypothèse sur la nature des actions à distance.

En séparant dans l'intégration générale représentée par le groupe (29) du § IV les binômes algébriques (correspondant aux trois racines nulles

de l'équation en s), des binômes transcendants qui correspondent aux autres racines, on obtient le groupe symbolique

$$(33)\left\{\begin{array}{lll} x_1 = ht + h' + \mathrm{S}h_1, h'_1, & y_1 = kt + k' + \mathrm{S}k_1, k'_1, & z_1 = lt + l' + \mathrm{S}l_1, l'_1, \\ x_2 = ht + h' + \mathrm{S}h_2, h'_2, & y_2 = kt + k' + \mathrm{S}k_2, k'_2, & z_2 = lt + l' + \mathrm{S}l_2, l'_2, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ x_N = ht + h' + \mathrm{S}h_N, h'_N, & y_N = kt + k' + \mathrm{S}k_N, k'_N, & z_N = lt + l' + \mathrm{S}l_N, l'_N. \end{array}\right.$$

Le signe S indique la sommation de $3(N-1)$ binômes, trigonométriques ou exponentiels, correspondant aux diverses valeurs positives et négatives de s.

Les binômes algébriques définissent un mouvement rectiligne et uniforme commun à tous les atomes, en sorte qu'il y a translation générale du système. Ce mouvement d'ensemble se compose pour chaque mobile avec le mouvement spécial qui résulte de la somme des autres binômes. C'est seulement ce dernier qu'il est intéressant de mettre à l'étude.

Si tous les paramètres dynamiques sont *positifs*, le mouvement spécial de chaque atome résulte évidemment de la composition d'autant de mouvements élémentaires *périodiques* qu'il y a de paramètres distincts. La trajectoire reste infinitésimale; son rayon vecteur ne dépasse jamais un maximum assignable. Le mobile circule dans tous les sens autour de sa position primitive qui semble le solliciter comme un foyer d'attraction. On peut dire qu'il y a *solidité* en chaque point du système.

Si tous les paramètres dynamiques sont *négatifs*, le mouvement spécial de chaque atome résulte de la composition d'autant de mouvements élémentaires non périodiques qu'il y a de paramètres distincts. La trajectoire acquiert une branche infinie ; son rayon vecteur croît sans limite. Dès que ce rayon devient comparable aux distances atomiques, des lois nouvelles interviennent pour régir la suite du mouvement. Le mobile fuit sa position primitive, qui semble le repousser. Il y a *gazéité* en chaque point du système.

Si les paramètres dynamiques sont *partie positifs et partie négatifs*, l'état du système atomique rappelle celui d'une *vapeur*.

Si tous ces paramètres avaient *de très-faibles valeurs positives*, on obtiendrait un état *quasi liquide*.

On comprend aussi qu'il puisse exister aux divers points du système des états physiques différents. Si, par exemple, quelques paramètres dynamiques étaient négatifs, il pourrait arriver, pour certains atomes, que les coefficients des binômes exponentiels correspondants fussent identiquement nuls ; l'état solide existerait alors en ces points, tandis que l'état de vapeur se produirait pour les autres. Mais on voit aussi qu'un tel phénomène est accidentel, éphémère, comme doit l'être, en physique, tout phénomène de transition.

Ainsi se trouvent complétées, élucidées, corroborées, les considérations relatives à la constitution physique et au changement d'état des corps que nous avons exposées au § 2.

8. *Vibrations calorifiques.* — Considérons un corps solide dans un état constant de température ; l'action calorifique peut être regardée comme engendrant sur chaque atome une force constante en grandeur et en direction. Les positions dans lesquelles les atomes pourraient rester en équilibre dépendent de ces forces, et c'est ainsi qu'elles influent sur le volume du solide. Mais aucun atome n'occupe en réalité sa position moyenne ; l'influence des paramètres dynamiques se manifeste par le développement de mouvements quasi vibratoires, résultant chacun, comme nous l'avons vu, de la composition d'une série de mouvements périodiques.

On voit ainsi comment la théorie générale que nous venons d'exposer pourra se prêter à l'analyse rigoureuse des phénomènes de la chaleur. C'est un sujet que nous nous proposons d'approfondir dans la suite de cette étude.

§ VI. — *Détermination des paramètres dynamiques au moyen des potentiels.*

Sommaire : Équations aux potentiels. — Équivalence analytique. — Déterminant fonctionnel. — Forme Hessienne de ce déterminant. — Équation intégrante. — Forme Hessienne de cette équation. — Résumé.

1. *Équations aux potentiels.* — Un système atomique fixe est analytiquement défini d'une façon complète, lorsqu'on connaît, pour chaque atome composant m, les trois coordonnées rectangulaires X_m, Y_m, Z_m et le potentiel Φ_m.

Les trois composantes U_m, V_m, W_m de l'action totale au point m s'expriment alors par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} U_m = \dfrac{d\Phi_m}{dX_m}; \\ V_m = \dfrac{d\Phi_m}{dY_m}; \\ W_m = \dfrac{d\Phi_m}{dZ_m}. \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer en m une force extérieure égale et contraire à cette action totale pour obtenir l'équilibre de cet atome.

Le potentiel Φ_m n'est pas seulement une fonction des coordonnées X_m, Y_m, Z_m de l'atome auquel il est relatif; il dépend aussi des coordonnées X_n, Y_n, Z_n de tout autre atome n du système.

Pour une déformation infinitésimale quelconque, les coordonnées du point m éprouvent des variations

$$(2)\qquad \begin{cases} x_m = \partial X_m, \\ y_m = \partial Y_m, \\ z_m = \partial Z_m; \end{cases}$$

celles d'un autre atome, n par exemple, éprouvent également des variations

$$(3)\qquad \begin{cases} x_n = \partial X_n, \\ y_n = \partial Y_n, \\ z_n = \partial Z_n; \end{cases}$$

de même les trois composantes de l'action totale en m éprouvent des variations déterminées

$$(4)\qquad \begin{cases} u_m = \delta U_m, \\ v_m = \delta V_m, \\ w_m = \delta W_m. \end{cases}$$

Ces trois dernières variations sont les composantes de l'*effort* engendré en m par la déformation du système atomique.

En tenant compte des formules (1), on peut écrire

$$(5)\qquad \begin{cases} U_m = \delta \dfrac{d\Phi_m}{dX_m}, \\ V_m = \delta \dfrac{d\Phi_m}{dY_m}, \\ W_m = \delta \dfrac{d\Phi_m}{dZ_m}, \end{cases}$$

équations dont les seconds membres sont évidemment des fonctions linéaires et homogènes de

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_N,\quad y_1,\ y_2, \ldots,\ y_N,\quad z_1,\ z_2, \ldots,\ z_N.$$

Ainsi développé, chacun des seconds membres comprend $3N$ termes, N étant le nombre total des points du système.

Formons, pour tous les atomes, les équations analogues à (5), en développant leurs seconds membres, et supposons qu'on écrive ces équations les unes au-dessous des autres, de façon que leurs premiers membres occupent l'ordre suivant

$$(6)\qquad u_1,\ u_2, \ldots,\ u_N,\ v_1,\ v_2, \ldots,\ v_N,\ w_1,\ w_2, \ldots,\ w_N.$$

Le symbole (6) pourra représenter ce groupe d'équations et nous servira à le désigner.

Si l'on regardait les premiers membres de ces $3N$ équations comme

des quantités connues, on aurait un système linéaire, dont nous désignerons le déterminant par $\mathfrak{D}'$.

2. *Équivalence analytique.* — On pourrait déduire le groupe (6) du groupe des équations (12) du § IV en multipliant respectivement ces dernières équations, dans l'ordre où elles se présentent, par les masses

$$g_1,\ g_2, \ldots,\ g_N,\quad g_1,\ g_2, \ldots,\ g_N,\quad g_1,\ g_2, \ldots,\ g_N,$$

dont nous représentons le produit par Γ^3.

Par conséquent, l'équivalence analytique est complète entre le groupe (6) du présent paragraphe et le groupe (12) du § IV. Le symbole $\mathfrak{D}$ désignant le déterminant de ce dernier groupe d'équations, on a évidemment

$$\mathfrak{D} = \Gamma^3 \mathfrak{D}. \tag{7}$$

Comme $\mathfrak{D}$ est identiquement nul, il en est de même de $\mathfrak{D}'$.

En identifiant les coefficients des équations (6) avec ceux des équations (12), § IV, modifiées par les multiplications indiquées ci-dessus, on trouverait pour toute valeur de m

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\Phi_m}{dX_m^2} &= -\,g_m A_m, \\ \frac{d^2\Phi_m}{dY_m^2} &= -\,g_m B_m, \\ \frac{d^2\Phi_m}{dZ_m^2} &= -\,g_m C_m, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\Phi_m}{dX_m\,dY_m} &= \frac{d^2\Phi_m}{dY_m\,dX_m} = -\,g_m P_m, \\ \frac{d^2\Phi_m}{dY_m\,dZ_m} &= \frac{d^2\Phi_m}{dZ_m\,dY_m} = -\,g_m Q_m, \\ \frac{d^2\Phi_m}{dZ_m\,dX_m} &= \frac{d^2\Phi_m}{dX_m\,dZ_m} = -\,g_m R_m, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

équations déjà indiquées au § I.

On trouverait encore pour toute combinaison de valeurs distinctes

des indices m et n

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\Phi_m}{dX_m dX_n} &= g_m a_{m,n},\\ \frac{d^2\Phi_m}{dY_m dY_n} &= g_m b_{m,n},\\ \frac{d^2\Phi_m}{dZ_m dZ_n} &= g_m c_{m,n},\end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\Phi_m}{dX_m dY_n} &= \frac{d^2\Phi_m}{dY_m dX_n} = g_m \alpha_{m,n},\\ \frac{d^2\Phi_m}{dY_m dZ_n} &= \frac{d^2\Phi_m}{dZ_m dY_m} = g_m \beta_{m,n},\\ \frac{d^2\Phi_m}{dZ_m dX_n} &= \frac{d^2\Phi_m}{dX_m dZ_m} = g_m \gamma_{m,n}.\end{aligned}\right.$$

Les éléments de $\mathfrak{D}'$ s'expriment ainsi très-simplement au moyen des éléments correspondants de $\mathfrak{D}$.

Les relations connues

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &g_m a_{m,n} = g_n a_{n,m}, \quad g_m b_{m,n} = g_n b_{n,m}, \quad g_m c_{m,n} = g_n c_{n,m},\\ &g_m \alpha_{m,n} = g_n \alpha_{n,m}, \quad g_m \beta_{m,n} = g_n \beta_{n,m}, \quad g_m \gamma_{m,n} = g_n \gamma_{n,m}\end{aligned}\right.$$

montrent que $\mathfrak{D}'$ est un *déterminant symétrique*.

5. *Déterminant fonctionnel.* — Celle des équations (6) dont le premier membre est u_m (ou, en d'autres termes, la $m^{ième}$ de ces équations) a pour coefficients, dans son second membre, les dérivées de la fonction $\frac{d\Phi_m}{dX_m}$ relativement à toutes les coordonnées

$$(13)\qquad X_1, X_2, \ldots, X_N, \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_N, \quad Z_1, Z_2, \ldots, Z_N.$$

La $(N+m)^{ième}$ de ces équations (dont le premier membre est v_m) a pour coefficients les dérivées de la fonction $\frac{d\Phi_m}{dY_m}$ relativement aux mêmes variables.

On trouve de même dans la $(2N+m)^{ième}$ équation (dont le premier membre est w_m) les dérivées de la fonction $\frac{d\Phi_m}{dZ_m}$.

Ces observations s'appliquant à toute valeur de l'indice m, pris dans la série

$$1, 2, 3, \ldots, N,$$

on voit que $\mathfrak{D}'$ est le *déterminant fonctionnel* du système

$$(14)\quad \frac{d\Phi_1}{dX_1}, \frac{d\Phi_2}{dX_2}, \ldots, \frac{d\Phi_N}{dX_N}, \quad \frac{d\Phi_1}{dY_1}, \frac{d\Phi_2}{dY_2}, \ldots, \frac{d\Phi_N}{dY_N}, \quad \frac{d\Phi_1}{dZ_1}, \frac{d\Phi_2}{dZ_2}, \ldots, \frac{d\Phi_N}{dZ_N},$$

composé d'une suite de fonctions des variables (13).

Ces fonctions doivent vérifier les équations connues

$$(15)\quad \begin{cases} S_m \dfrac{d\Phi_m}{dX_m} = U_m = 0, \\ S_m \dfrac{d\Phi_m}{dY_m} = V_m = 0, \\ S_m \dfrac{d\Phi_m}{dZ_m} = W_m = 0. \end{cases}$$

Elles ne sont donc pas indépendantes les unes des autres. On en peut conclure que $\mathfrak{D}'$ est identiquement nul. C'est ce que nous avons déjà démontré par une autre méthode.

4. *Forme Hessienne*. — Le potentiel Φ est déterminé par la formule

$$(16)\qquad \Phi_m = -\Sigma_n \int g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n})\, dR_{m,n}.$$

On en déduit, d'une part,

$$(17)\qquad \frac{d\Phi_m}{dX_m} = -\Sigma_n g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n}) \frac{dR_{m,n}}{dX_m},$$

et, d'autre part,

$$(18)\qquad \frac{d\Phi_m}{dX_n} = -g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n}) \frac{dR_{m,n}}{dX_n}.$$

En permutant les indices m et n dans cette dernière formule, on trouve

$$(19)\qquad \frac{d\Phi_n}{dX_m} = -g_n g_m f_{n,m}(R_{n,m}) \frac{dR_{n,m}}{dX_m}.$$

relation qu'on peut encore écrire

$$\frac{d\Phi_n}{dX_m} = - g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n}) \frac{dR_{m,n}}{dX_m}. \tag{20}$$

Les formules (17) et (20) conduisent à poser

$$\frac{d\Phi_m}{dX_m} = \sum_n \frac{d\Phi_n}{dX_m}. \tag{21}$$

Soit

$$\mathbf{P} = \tfrac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_N) \tag{22}$$

la demi-somme des potentiels de tous les atomes du système donné.

Nous aurons

$$\sum_n \frac{d\Phi_n}{dX_m} = 2\frac{d\mathbf{P}}{dX_m} - \frac{d\Phi_m}{dX_m}, \tag{23}$$

et nous trouverons par les équations (21) et (23) la formule très-simple

$$\frac{d\Phi_m}{dX_m} = \frac{d\mathbf{P}}{dX_m}, \tag{24}$$

qui a lieu quel que soit m.

Cette formule en X a évidemment ses analogues en Y et Z; de là le groupe

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Phi_m}{dX_m} &= \frac{d\mathbf{P}}{dX_m}, \\ \frac{d\Phi_m}{dY_m} &= \frac{d\mathbf{P}}{dY_m}, \\ \frac{d\Phi_m}{dZ_m} &= \frac{d\mathbf{P}}{dZ_m}. \end{aligned} \right. \tag{25}$$

D'après cela, la suite des fonctions (14) peut s'écrire

$$\frac{d\mathbf{P}}{dX_1}, \frac{d\mathbf{P}}{dX_2}, \ldots, \frac{d\mathbf{P}}{dX_N}, \frac{d\mathbf{P}}{dY_1}, \frac{d\mathbf{P}}{dY_2}, \ldots, \frac{d\mathbf{P}}{dY_N}, \frac{d\mathbf{P}}{dZ_1}, \frac{d\mathbf{P}}{dZ_2}, \ldots, \frac{d\mathbf{P}}{dZ_N}, \tag{26}$$

et l'on voit que *le déterminant* $\mathfrak{D}'$ *est l'Hessien de la demi-somme* **P**

des potentiels de tous les atomes, considérée comme fonction des coordonnées primitives

$$X_1,\ X_2,\ldots,\ X_N,\quad Y_1,\ Y_2,\ldots,\ Y_N,\quad Z_1,\ Z_2,\ldots,\ Z_N$$

de ces atomes.

5. *Équation intégrante.* — Revenons au groupe des équations (6), définies au début de ce paragraphe. Remplaçons respectivement les premiers membres

$$u_1,\ u_2,\ldots,\ u_N,\quad v_1,\ v_2,\ldots,\ v_N,\quad w_1,\ w_2,\ldots,\ w_N$$

par

$$-sg_1x_1, -sg_2x_2,\ldots,\ -sg_Nx_N,\quad -sg_1y_1,\ -sg_2y_2,\ldots,\ -sg_Ny_N,$$
$$-sg_1z_1,\ -sg_2z_2,\ldots,\ -sg_Nz_N.$$

Faisons ensuite passer les premiers membres dans les seconds en réunissant les termes semblables.

Nous aurons un système de 3N équations linéaires et homogènes, dont nous désignerons le *résultant* par $\mathfrak{D}'_s$.

Ce résultant pourrait se déduire de celui que nous avons précédemment désigné par $\mathfrak{D}_s$, en multipliant la 1^{ière}, la $(N+1)^{ième}$ et la $(2N+1)^{ième}$ ligne horizontale de ce dernier par g_1; sa 2ième, sa $(N+2)^{ième}$ et sa $(2N+2)^{ième}$ ligne par g_2; ...; sa $N^{ième}$, sa $2N^{ième}$ et sa $3N^{ième}$ ligne par g_N.

On a donc identiquement

$$\mathfrak{D}'_s = \Gamma^3\,\mathfrak{D}_s; \tag{27}$$

en sorte que l'équation du degré 3N

$$\mathfrak{D}_s = 0, \tag{28}$$

qui nous a permis d'intégrer les équations différentielles des mouvements simultanés, peut aussi s'écrire

$$\mathfrak{D}'_s = 0. \tag{29}$$

6. *Forme Hessienne.* — Représentons par

$$\rho_m = \sqrt{(X_m - X)^2 + (Y_m - Y)^2 + (Z_m - Z)^2} \tag{30}$$

le rayon vecteur qui va d'un point fixe (X, Y, Z) de l'espace à l'atome quelconque m, et soit

$$\mathbf{M} = \tfrac{1}{2}(g_1\rho_1^2 + g_2\rho_2^2 + \ldots + g_N\rho_N^2) \tag{31}$$

la moitié du *moment d'inertie polaire* du système atomique, relativement au point fixe considéré.

On voit aisément que

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{dX_m^2} = \frac{d^2\mathbf{M}}{dY_m^2} = \frac{d^2\mathbf{M}}{dZ_m^2} = g_m,$$

et que la dérivée seconde de $\mathbf{M}$, relative à une combinaison quelconque de deux variables distinctes prises dans la série

$$X_1,\ X_2, \ldots,\ X_N,\quad Y_1,\ Y_2, \ldots,\ Y_N,\quad Z_1,\ Z_2, \ldots,\ Z_N.$$

est identiquement nulle.

Il est clair, d'après cela, que l'Hessien de la fonction

$$\mathbf{P}_s = \mathbf{P} + s\mathbf{M} \tag{32}$$

peut se déduire de l'Hessien $\mathfrak{D}'$ de la fonction $\mathbf{P}$, en ajoutant respectivement aux 3N éléments principaux de ce dernier déterminant les quantités

$$sg_1,\ sg_2, \ldots,\ sg_N,\quad sg_1,\ sg_2, \ldots,\ sg_N,\quad sg_1,\ sg_2, \ldots,\ sg_N.$$

Ce sont précisément les opérations qu'il faut effectuer sur $\mathfrak{D}'$ pour obtenir le résultant que nous avons désigné par $\mathfrak{D}'_s$. Donc ce dernier déterminant est l'Hessien de la fonction $\mathbf{P}_s$.

Par conséquent *on peut déterminer les paramètres dynamiques en égalant à zéro l'Hessien de la fonction* $\mathbf{P}_s$, *demi-total de la somme des potentiels atomiques et du produit de l'inconnue s par le moment d'inertie polaire du système relativement à un point quelconque de l'espace.*

On sait que l'Hessien d'une fonction d'un nombre quelconque de variables se reproduit identiquement lorsqu'on opère une substitution orthogonale. Par conséquent $\mathfrak{D}_s$ *est indépendant des axes de coordonnées auxquels on rapporte la figure.*

On arrive plus simplement à cette conclusion en se reportant à la formule (27), et se rappelant que $\mathbf{D}_s$ est indépendant des axes des coordonnées, comme nous l'avons démontré au § V.

7. *Résumé.* — L'équation en s

$$(33)\qquad \mathfrak{D}_s = \Gamma^3\,\mathfrak{D}_s = 0,$$

du degré $3N$, a toutes ses racines réelles.

On distingue trois racines nulles.

Les autres racines se divisent en positives s, dont nous désignerons le nombre par μ, et en négatives σ dont nous désignerons le nombre par ν. On a alors

$$(34)\qquad \mu + \nu = 3(N-1).$$

Au moyen de ces notations, le mouvement infinitésimal de l'atome m se représente par des équations de la forme

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} x_m &= ht + h' + \Sigma_\mu\left(h_m \sin t\sqrt{s} + h'_m \cos t\sqrt{s}\right) \\ &\qquad + \Sigma_\nu\left(\mathrm{H}_m e^{t\sqrt{-\sigma}} + \mathrm{H}'_m e^{-t\sqrt{-\sigma}}\right), \\ y_m &= kt + k' + \Sigma_\mu\left(k_m \sin t\sqrt{s} + k'_m \cos t\sqrt{s}\right) \\ &\qquad + \Sigma_\nu\left(\mathrm{K}_m e^{t\sqrt{-\sigma}} + \mathrm{K}'_m e^{-t\sqrt{-\sigma}}\right), \\ z_m &= lt + l' + \Sigma_\mu\left(l_m \sin t\sqrt{s} + l'_m \cos t\sqrt{s}\right) \\ &\qquad + \Sigma_\nu\left(\mathrm{L}_m e^{t\sqrt{-\sigma}} + \mathrm{L}'_m e^{-t\sqrt{-\sigma}}\right), \end{aligned}\right.$$

Σ_μ désignant la somme de μ binômes trigonométriques correspondant aux racines positives s, tandis que Σ_ν désigne la somme de ν binômes exponentiels correspondant aux racines négatives σ.

Les coefficients (h, k, l) et (h', k', l'), qui appartiennent aux binômes linéaires, sont les mêmes pour tous les atomes. Les premiers sont les

trois projections de la vitesse acquise au temps zéro par le centre de gravité du système atomique, en vertu des impulsions initiales; les trois derniers sont les projections du déplacement subi par ce centre de gravité, par suite des déplacements atomiques au temps zéro.

Les coefficients (h_m, k_m, l_m) et (h'_m, k'_m, l'_m), appartenant aux binômes trigonométriques, relatifs à une racine positive s, varient d'un atome à un autre. On a donc, pour chaque racine s, 6N coefficients distincts. Mais ces paramètres ne sont pas tous arbitraires; ils sont liés entre eux par des équations linéaires, qui peuvent être très-simplement définies au moyen des potentiels par une notation symbolique.

A cet effet, regardons h_n, k_n, l_n comme représentant des variations infinitésimales de X_n, Y_n, Z_n, et désignons par

$$\delta\frac{d\mathbf{P}_s}{dX_m},\quad \delta\frac{d\mathbf{P}_s}{dY_m},\quad \delta\frac{d\mathbf{P}_s}{dZ_m}$$

les variations totales correspondantes des trois dérivées de la fonction $\mathbf{P}_s$ relativement aux coordonnées de l'atome m que nous considérons en particulier. Nous poserons

$$(36)\qquad \delta\frac{\mathbf{P}_s}{dX_m}=0,\quad \delta\frac{\mathbf{P}_s}{dY_m}=0,\quad \delta\frac{\mathbf{P}_s}{dZ_m}=0.$$

Écrivant des équations analogues pour chaque atome du système, nous obtiendrons un système de 3N équations linéaires et homogènes entre les paramètres h_n, k_n, l_n. Le *résultant* de ce système est égal à $\mathfrak{D}'_s$ et s'annule en vertu de l'équation (33). On peut donc prendre arbitrairement un des paramètres et calculer tous les autres.

En procédant de même pour les h'_n, k'_n, l'_n, nous obtiendrons un système d'équations tout à fait analogue, qui se déduirait du précédent en ajoutant un accent à chacun des h_n, k_n, l_n. On peut donc encore prendre arbitrairement un des paramètres et calculer tous les autres.

Ainsi les 6N coefficients introduits par chaque racine positive dans le système total des équations (35) se réduisent à deux arbitraires.

Il en est absolument de même des 6N coefficients, tels que (H_m, K_m, L_m) et (H'_m, K'_m, L'_m), qu'introduit chaque racine négative dans les équations des mouvements atomiques.

En résumé, le système de ces équations contient :

1° Les 6 coefficients (h, k, l), (h', k', l');

2° $6\mu N$ coefficients, tels que (h_m, k_m, l_m), (h'_m, k'_m, l'_m), résultant, pour chaque atome m, de chaque racine positive s;

3° $6\nu N$ coefficients tels que (H_m, K_m, L_m), (H'_m, K'_m, L'_m), résultant, pour chaque atome m, de chaque racine négative σ; soit en tout :

$$6(1 + \mu N + \nu N) = 6[1 + 3N(N - 1)]$$

coefficients.

Mais ces paramètres se réduisent à

$$6 + 2(\mu + \nu) = 6N$$

arbitraires, ainsi que cela doit être pour un système d'équations finies qui représente l'intégration générale de 3N équations différentielles du second ordre.

Ces 6N constantes arbitraires peuvent se déterminer d'après les conditions initiales du mouvement, savoir : les projections des déplacements et des vitesses au temps zéro pour tous les points du système atomique.

Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre;

PAR M. LAGUERRE.

Étant données dans l'espace une surface du second ordre et deux droites fixes, M. Chasles a démontré que si une droite mobile était assujettie à rencontrer les deux droites fixes en s'appuyant sur la surface, la courbe de contact des droites mobiles était une courbe gauche du quatrième ordre, de l'espèce de celles par lesquelles on peut mener une infinité de surfaces du second ordre.

Inversement, étant donnée une courbe résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre, on peut se demander si elle peut toujours être engendrée par le procédé qui résulte de la proposition de M. Chasles, et, si elle peut l'être, comment l'on pourra déterminer une surface du second ordre et deux droites de façon à obtenir la génération de la courbe.

La Note qui suit a pour objet de résoudre cette question. Je montre que par la courbe donnée on peut toujours faire passer six surfaces qui permettent la génération indiquée par M. Chasles, et que, l'une des surfaces étant choisie, on peut encore choisir d'une infinité de façons les deux droites fixes.

La proposition suivante montrera comment on peut résoudre le problème que je m'étais proposé.

Par la courbe donnée passent quatre cônes dont les sommets forment un tétraèdre. Prenons arbitrairement deux arêtes opposées de ce tétraèdre et menons une droite quelconque qui, s'appuyant sur ces arêtes, rencontre la courbe en un point A : on sait alors qu'elle la rencontre en un autre point B.

Par la droite AB on peut mener quatre plans qui touchent la

courbe; les quatre points de contact sont les sommets d'un tétraèdre; deux arêtes opposées de ce tétraèdre rencontrent les deux arêtes opposées du tétraèdre dont j'ai parlé plus haut et dont les sommets sont les sommets des quatres cônes. Soient CC′ et DD′ ces deux arêtes; C, C′, D et D′ étant les quatre points de contact avec la courbe.

Choisissons arbitrairement l'une de ces arêtes, CC′ par exemple; les quatre droites AC, AC′, BC et BC′ sont situées sur une même surface du second ordre S passant par la courbe donnée. Cela posé :

Si une droite mobile rencontre à chaque instant les droites AB et DD′ en s'appuyant sur la surface S, elle la touchera précisément le long de la courbe donnée.

Les propositions sur lesquelles je me suis appuyé pour la solution de ce problème se rattachent étroitement, comme je m'en suis aperçu en rédigeant cette Note, aux théorèmes donnés par M. Hesse dans son beau Mémoire sur les courbes du troisième ordre (*Crelle*, t. XLVIII); théorèmes qui, du reste, si l'on veut remonter plus haut, se trouvent, quant au fond, dans une Note très-courte sur les focales publiée par M. Van Reiss dans le tome V du *Journal de Quetelet*.

Les surfaces réglées du quatrième ordre qui se présentent dans cette Note sont en elles-mêmes très-intéressantes, et je les avais déjà rencontrées en étudiant certains théorèmes de M. W. Roberts relatifs aux surfaces du second ordre que j'ai pu, par leur moyen, étendre aux surfaces du quatrième ordre ayant une conique double.

Du reste, M. de la Gournerie s'était déjà auparavant occupé, d'une façon toute spéciale, de ces surfaces réglées; je n'en parlerai donc ici qu'accidentellement, en me contentant de mentionner la définition très-simple que l'on en peut donner en s'appuyant sur la théorie des fonctions elliptiques, et je renverrai le lecteur curieux de poursuivre cette recherche à l'ouvrage très-complet que M. de la Gournerie a publié à ce sujet.

I. Dans tout ce qui suit, je désignerai sous le nom de *biquadratique gauche*, ou simplement sous le nom de biquadratique, l'intersection de deux surfaces du second ordre.

Bien que toutes les propositions sur lesquelles je m'appuierai puissent s'établir facilement par des considérations de pure Géométrie

(elles se déduisent immédiatement des relations très-simples que M. Chasles a données dans sa *Géométrie supérieure*, p. 157, entre trois couples de points en involution et leurs points milieux), j'ai cru, pour abréger, pouvoir me servir de la belle théorie fondée par M. Clebsch.

En ce qui concerne les biquadratiques gauches, la théorie de M. Clebsch peut s'établir d'une façon très-simple et très-facile; mais, quoique la démonstration de ses formules, dans ce cas spécial, puisse donner lieu à quelques remarques dignes d'intérêt, je me contenterai de renvoyer le lecteur aux divers Mémoires qu'il a publiés sur ce sujet [*], en exposant brièvement ceux des résultats qu'il a obtenus sur lesquels je m'appuierai.

2. Soit tracée sur une surface du second ordre S, une biquadratique quelconque K. A cette courbe se rattache une intégrale elliptique [**]; on peut concevoir que la valeur de la variable qui entre dans cette intégrale soit à chaque instant fixée par la position d'un point mobile sur la biquadratique, ou que le déplacement du point mobile de la courbe détermine la variation de la variable.

Étant pris, sur la courbe, un point arbitraire ω, qui corresponde à la valeur de la variable prise pour limite inférieure de l'intégrale; si le point mobile, qui fixe à chaque instant la valeur de cette variable, se meut sur la courbe jusqu'à un point donné A, on obtiendra pour l'intégrale considérée une valeur parfaitement déterminée. Cette valeur, cependant, ne sera pas entièrement déterminée par la seule connaissance du point A; elle dépend, comme on le sait, du chemin que l'on a suivi pour se mouvoir, sur la courbe, du point ω au point A; et

---

[*] *Voir* notamment le Mémoire *Uber die Anwendung der Abelschen functionen in der Geometrie* (*Crelle*, t. LXIII).

[**] Quand la courbe est tracée sur une sphère, cette intégrale prend une forme géométrique très-simple; en désignant par M un point quelconque de cette courbe, par F, G, H, K ses quatre foyers réels, elle s'exprime de la façon suivante

$$\int \frac{ds}{\sqrt{\text{MF}.\text{MG}.\text{MH}.\text{MK}}}.$$

d'après le chemin qu'on a suivi, la valeur de l'intégrale peut demeurer la même, ou être augmentée d'un multiple quelconque de l'une des deux périodes qui appartiennent à l'intégrale elliptique considérée. Dans tout ce qui suit, je désignerai constamment ces deux périodes par $2p$ et $2q$, en posant, pour abréger, $p+q=r$, $2r$ étant une autre période de l'intégrale dépendant des deux premières.

Lorsqu'on se donne la valeur de l'intégrale, prise à partir du point origine ω, le point A qui correspond à la valeur extrême de la variable est complètement déterminé ; mais, lorsqu'on se donne au contraire ce point A, la valeur de l'intégrale n'est déterminée qu'à un multiple près de $2p$ et de $2q$.

Cela posé, la proposition fondamentale donnée par M. Clebsch, sur laquelle je m'appuierai dans tout ce qui suit, peut s'énoncer ainsi :

« Si l'on coupe la biquadratique K par un plan qui la rencontre aux points A, B, C et D, la somme des quatre intégrales dont les limites supérieures sont caractérisées par les points A, B, C et D est une quantité constante, quelle que soit la position du plan, ou, du moins, cette quantité ne peut varier que de multiples des deux périodes $2p$ et $2q$. »

Pour exprimer ce genre de relation, on peut employer avec avantage le signe de la congruence de Gauss, et écrire simplement

$$A+B+C+D\equiv\alpha \quad (\text{mod. } 2p,\, 2q),$$

α désignant une quantité constante.

Comme jusqu'ici l'origine ω a été prise arbitrairement, rien n'empêche de la choisir de telle sorte que la constante α soit nulle ; en sorte que l'on aura simplement

$$(1) \qquad A+B+C+D\equiv 0.$$

Dans cette congruence, A ne représente pas le point A, mais l'intégrale qui s'étend depuis l'origine fixe jusqu'à ce point. Il n'y a d'ailleurs lieu de redouter aucune confusion dans ce double emploi d'une même lettre pour représenter un point et une intégrale, la présence du signe de la congruence suffisant pour fixer le sens que l'on doit y attacher.

3. La congruence (1) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C, D de la biquadratique soient dans un même plan.

Soient A et B deux points donnés de cette courbe, il existe une surface du second ordre S, bien déterminée, qui passe par la courbe et qui a la droite AB pour génératrice. Si, par AB, on mène un plan quelconque rencontrant la courbe aux points X et Y, la droite XY est, comme on le sait, l'une quelconque des génératrices du second système de cette surface.

Or, d'après la relation (1), on a

$$X + Y + A + B \equiv 0, \quad \text{d'où} \quad X + Y \equiv -(A + B).$$

Si l'on pose, pour abréger, $A + B \equiv k$, l'on voit que, pour toutes les génératrices du système contraire à AB, l'on a

$$(2) \qquad X + Y \equiv -k.$$

De même, si X et Y désignent les deux points où une génératrice de la surface S de même système que AB s'appuie sur k, on voit que l'on a la relation

$$(3) \qquad X + Y \equiv k.$$

D'où cette conclusion : Si l'on prend, sur la biquadratique, une série de points X, Y satisfaisant à la relation (3), toutes les droites telles que XY sont les génératrices d'un système d'une même surface du second ordre passant par la biquadratique ; et les droites XY, qui joignent les couples de points satisfaisant à la relation (2) sont les génératrices du second système de cette même surface.

On voit que chacune des surfaces du second ordre que l'on peut mener par K est caractérisée par une constante $\pm k$; je désignerai souvent l'une de ces surfaces par la valeur de la constante qui lui est propre, et l'on comprendra aisément ce que je veux dire par surface $(\pm k)$.

4. Parmi les surfaces du second ordre qui passent par K se trou-

vent en particulier quatre cônes. Soient X et Y les points où l'une des génératrices d'un de ces cônes s'appuie sur la courbe, cette génératrice et la génératrice infiniment voisine étant dans un même plan, on doit avoir

$$2(X + Y) \equiv 0;$$

si l'on résout cette congruence, en observant qu'elle exprime que le second membre est non pas nul, mais un multiple quelconque de $2p$ et de $2q$, on en déduit les quatre solutions suivantes :

$$X + Y \equiv 0,$$
$$X + Y \equiv p,$$
$$X + Y \equiv q,$$
$$X + Y \equiv r;$$

dans la dernière congruence, j'ai posé, pour abréger, $p + q = r$.

Telles sont les relations qui caractérisent les quatre cônes du second ordre qui passent par K; j'appellerai O, P, Q, R les sommets de ces quatre cônes, en sorte que toute droite passant par le sommet O et s'appuyant en deux points de la courbe donnera lieu à la relation

$$X + Y \equiv 0.$$

De même, toute génératrice du cône ayant pour sommet Q donnera lieu à la relation

$$X + Y \equiv q.$$

5. Les points O, P, Q, R sont les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à toutes les surfaces du second ordre qui passent par K. On peut grouper de trois façons différentes les arêtes de ce tétraèdre de façon que chaque groupe contienne deux arêtes opposées. Soient OP et QR les arêtes opposées correspondant à un mode de groupement, et X un point quelconque de la courbe K.

Menons la droite OX, elle rencontre la courbe en un deuxième point X', et l'on a

$$X + X' \equiv 0;$$

joignons X' au point P et appelons Y le point où la droite PX' rencontre de nouveau la courbe. On a

$$X' + Y \equiv p.$$

Les deux points ainsi obtenus X et Y, satisfont à la relation

$$X - Y \equiv p, \quad \text{ou bien} \quad Y - X \equiv p.$$

Je dirai que ces deux points sont deux points conjugués de la biquadratique, relativement au mode de groupement défini par les arêtes OP et QR, ou bien par la demi-période p.

La droite XY qui joint deux points conjugués, rencontre évidemment l'arête OP; on peut voir aussi facilement qu'elle rencontre l'arête opposée RQ. Joignons en effet X au sommet R, et soit X'' le point où cette droite coupe K; menons la droite $X''Q$, et soit Y'' le point de rencontre de cette droite avec K. L'on a évidemment

$$X + X'' \equiv r, \quad X'' + Y'' \equiv q, \quad \text{d'où} \quad Y'' - X \equiv q - r \equiv p.$$

Le point Y'', ainsi déterminé, se confond avec le point Y; ce qui démontre la proposition énoncée.

Ainsi la droite joignant deux points conjugués quelconques s'appuie sur les deux arêtes opposées du tétraèdre qui définissent le mode de groupement; réciproquement, toute droite s'appuyant sur ces deux arêtes, et rencontrant la courbe, la rencontre en deux points conjugués.

Si nous considérons une surface quelconque du second ordre S passant par K, les deux arêtes OP et QR sont des droites polaires réciproques, relativement à cette surface; l'une de ces droites la coupe donc en deux points réels ϖ et ϖ'. Deux points conjugués quelconques et les points ϖ et ϖ' sont dans un même plan qui coupe la surface suivant une conique divisée harmoniquement par les quatre points considérés.

6. Si l'on détermine tous les couples de points conjugués qui correspondent au mode de groupement caractérisé par les deux arêtes

OP et QR, ou par la demi-période p, les droites joignant ces différents points forment une surface réglée ayant pour droites doubles les arêtes OP et QR; cette surface est évidemment du quatrième ordre; je la désignerai par la notation T_p.

Si l'on appelle Y et X les points où une génératrice quelconque de cette surface s'appuie sur la courbe, l'on a

$$Y - X \equiv p.$$

Il y a lieu de considérer deux autres surfaces de même espèce caractérisées par les demi-périodes q et r; je les désignerai par T_q et T_r.

7. *A et B étant deux points quelconques de K, par la corde AB on peut mener quatre plans tangents à la courbe; les quatre points de contact sont les sommets d'un tétraèdre. Deux arêtes opposées quelconques de ce tétraèdre rencontrent deux arêtes opposées du tétraèdre* OPQR.

Appelons X l'un quelconque des points de contact des plans tangents cherchés, on a la relation

$$A + B + 2X \equiv 0;$$

d'où l'on déduit pour X les quatre valeurs suivantes :

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} X' &\equiv -\left(\frac{A+B}{2}\right), & X''' &\equiv -\left(\frac{A+B}{2}\right) + q, \\ X'' &\equiv -\left(\frac{A+B}{2}\right) + p, & X^{\text{IV}} &\equiv -\left(\frac{A+B}{2}\right) + r. \end{aligned} \right.$$

Considérons deux quelconques des arêtes opposées du tétraèdre X X'X''X''', par exemple les arêtes X'X'' et X'''X^{IV}, l'on a

$$X'' - X' \equiv p \quad \text{et} \quad X^{\text{IV}} - X''' \equiv p,$$

puisque $r \equiv p + q$.

La proposition est donc démontrée; les deux arêtes X'X'' et X'''X^{IV} sont deux génératrices de la surface T_p.

8. Supposons maintenant que la corde AB soit elle-même une génératrice de T_p, en sorte que l'on ait

$$(\beta) \qquad A - B \equiv p;$$

désignons toujours par X', X'', X''' et X^{IV} les quatre points de contact des plans que l'on peut mener par cette corde tangentiellement à la courbe. Des quatre arêtes du tétraèdre $X'X''X'''X^{\text{IV}}$, deux sont aussi des génératrices de T_p; ce sont les droites $X'X''$ et $X'''X^{\text{IV}}$.

Choisissons arbitrairement une de ces droites, $X'X''$ par exemple; il est facile de voir que les quatre droites AX', AX'', BX', BX'' sont des génératrices d'une même surface du second ordre passant par K. Les congruences (α), qui déterminent X', X'', X''' et X^{IV}, donnent, en effet, si l'on tient compte de la relation (β),

$$A + X' \equiv B + X'' \equiv \frac{p}{2} \quad \text{et} \quad A + X'' \equiv B + X' \equiv -\frac{p}{2}.$$

Cette surface du second ordre est caractérisée par la constante $\pm\frac{p}{2}$: on voit qu'elle est la même, quelle que soit la génératrice AB de la surface T_p que l'on ait choisie. Je la désignerai dans ce qui suit par la lettre S_p.

Relativement à cette surface S_p, je dirai que les droites AB et $X'X''$ sont deux génératrices associées de la surface T_p.

Puisque les droites AX', AX'', BX' et BX'' sont des génératrices de S_p, l'on voit que deux génératrices associées sont des droites polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à S_p.

Si nous avions fait correspondre la droite $X'''X^{\text{IV}}$ à la corde AB, nous aurions démontré de même que les droites AX''', AX^{IV}, BX''' et BX^{IV} étaient les génératrices d'une même surface du second ordre passant par la courbe K et caractérisées par la constante

$$\pm\left(\frac{p}{2} + q\right).$$

Je désignerai cette deuxième surface par la notation $S_{p'}$.

Les droites telles que AB et $X'''X^{\text{IV}}$ seront dites des génératrices associées de T_p relativement à la surface $S_{p'}$.

La considération des surfaces T_q et T_r conduirait de même à la considération de quatre autres surfaces du second ordre S_q, $S_{q'}$; S_r et $S_{r'}$.

La propriété que j'ai signalée des six surfaces S_p, $S_{p'}$; S_q, $S_{q'}$; S_r, $S_{r'}$, à savoir : qu'à chacune d'elles correspond une surface réglée du quatrième ordre dont chaque génératrice s'appuie en deux points de K et qui est à elle-même sa transformée par polaires réciproques, lorsque l'on prend pour base la surface considérée, est caractéristique de ces surfaces.

Étant donnée une droite s'appuyant en deux points sur K et telle, que sa polaire, par rapport à une surface de second degré passant par cette courbe, s'appuie aussi en deux points sur cette courbe, on démontrera facilement que cette droite est une génératrice de l'une des trois surfaces T_p, T_q et T_r, et que la surface du second degré est une des six surfaces que j'ai mentionnées et qui correspondent deux à deux à T_p, T_q et T_r.

9. Lemme. — *Étant données deux génératrices quelconques* G *et* G' *de la surface* T_p, *associées par rapport à la surface* S_p, *et deux génératrices quelconques* H *et* H' *de* T_p, *associées par rapport à* $S_{p'}$, *ces quatre droites et les arêtes* OP, OQ *sont toujours situées sur un même hyperboloïde.*

En effet, les droites H, H' et G, qui s'appuient toutes les trois sur OP et sur OQ, déterminent un hyperboloïde, dont l'intersection avec la surface T_p est une courbe du huitième ordre.

Les droites H, H', G, OP et OQ faisant partie de l'intersection et ces deux dernières devant, chacune, compter pour deux, puisqu'elles sont des droites doubles de T_p, la courbe d'intersection ne peut être complétée que par une sixième droite. Il s'agit de prouver que cette droite est précisément G'.

A cet effet, désignons respectivement par h, h_1; h', h'_1; g, g_1; x, x_1 les points où s'appuient sur la courbe K les droites H, H', G et la droite cherchée.

Les droites H et H' étant associées par rapport à la surface $S_{p'}$, l'on a

$$h - h_1 \equiv p, \quad h' - h'_1 \equiv p, \quad h' + h \equiv \frac{p}{2} + q;$$

la droite G et la droite cherchée étant des génératrices de T_p, l'on a aussi

$$g - g_1 \equiv p \quad \text{et} \quad x - x_1 \equiv p.$$

Maintenant, remarquons que les huit points h, h_1; h', h'_1; g, g_1; x, x_1 étant les points d'intersection de K avec une surface de second degré, on a, d'après les principes posés par M. Clebsch,

$$h + h_1 + h' + h'_1 + g + g_1 + x + x_1 \equiv 0.$$

On déduit facilement des relations précédentes

$$2x + g + g_1 \equiv 0.$$

D'où l'on voit que la droite cherchée xx_1 ne peut être que l'associée de G relativement à la surface de S_p ou son associée relativement à la surface $S_{p'}$.

La dernière hypothèse ne peut être admise.

Considérons en effet les quatre droites H, H'; G et xx_1, qui sont quatre génératrices d'un même système de l'hyperboloïde.

Les droites de ce groupe ne font que s'échanger entre elles, lorsqu'on prend leurs polaires relativement à $S_{p'}$; l'hyperboloïde qui les contient devrait donc se transformer en lui-même en employant une transformation par polaires réciproques ayant pour base $S_{p'}$.

Ce qui est impossible, puisque l'hyperboloïde ne se confond pas avec $S_{p'}$.

L'hypothèse précédente étant donc écartée, il s'ensuit que la droite cherchée est la génératrice associée à G relativement à la surface S_p.

Ce qui démontre le lemme énoncé ci-dessus.

Corollaire. — Prenons la trace de T_p sur un plan quelconque; soient H et H' les points où ce plan rencontre les arêtes OP et QR, ces points sont les deux points doubles de la courbe du quatrième ordre qui forme cette trace.

Soient α et β les points où deux génératrices quelconques, associées par rapport à $S_{p'}$, coupent le plan sécant.

Désignons en général par x et y les deux points de la courbe où le

plan sécant coupe deux génératrices mobiles de T_p associées par rapport à S_p; il résulte du lemme précédent que, quel que soit le couple de points x et y que l'on considère, ces deux points variables et les quatre points fixes α, β, Π et Π' sont sur une même conique.

10. Lemme. — *Étant donnés une courbe du quatrième ordre ayant deux points doubles* Π *et* Π', *et deux points fixes* α *et* β *pris sur cette courbe, si l'on mène par ces quatre points une conique quelconque, la droite qui joint les deux autres points* x, y, *où la conique variable rencontre de nouveau la courbe, enveloppe une conique.*

Joignons les points Π et Π' à un point E pris arbitrairement dans l'espace et, par les droites $E\Pi$ et $E\Pi'$, faisons passer une surface du second degré quelconque A. Le cône, ayant pour sommet E et pour base la courbe du quatrième degré, coupera cette surface suivant une biquadratique B. Soient a et b les projections coniques des points α et β sur la courbe B, X et Y les projections coniques des points variables x et y; les points α, β, x, y et Π, Π' étant sur une même conique, il en résulte que les points a, b, X et Y sont dans un même plan. Comme, d'ailleurs, ils sont situés sur la biquadratique, l'on voit que la droite XY engendre dans l'espace une surface du second degré; les droites telles que xy, qui, dans le plan sécant, sont les projections des génératrices de cette surface enveloppent donc une conique.

Corollaire. — De ce lemme et du corollaire précédent, il résulte immédiatement la proposition suivante :

Si l'on coupe la surface T_p par un plan quelconque et si l'on désigne, pour un instant, sous le nom de *points associés de la courbe d'intersection*, les points de cette courbe qui appartiennent à deux génératrices de T_p associées relativement à S_p, les droites qui joignent deux points associés quelconques enveloppent une conique.

11. *Si d'un point de l'espace* A, *on mène les différentes droites qui rencontrent deux génératrices de* T_p *associées entre elles par rapport à la surface* S_p, *ces droites forment un cône du second degré.*

En effet, pour trouver le degré du cône formé par ces droites,

menons par A un plan quelconque M et cherchons combien ce cône contient de droites satisfaisant à la condition donnée.

Ces droites doivent évidemment passer par un couple de points associés de la courbe d'intersection de T_p avec le plan M; or les droites qui joignent ces points associés enveloppent une conique à laquelle on ne peut mener que deux tangentes par le point A. Le plan M ne contient donc que deux droites satisfaisant à la condition donnée; le lieu cherché est donc un cône du second degré.

12. Les surfaces réglées T_p et $S_{p'}$ ont quatre génératrices communes. En effet, les génératrices rectilignes de $S_{p'}$ se partagent, comme on sait, en deux systèmes. En désignant par X et Y les points où l'une quelconque de ces droites s'appuie sur K, l'on a, pour les génératrices de l'un des systèmes, la relation

$$X + Y \equiv \frac{p}{2} + q;$$

je dirai que les génératrices qui donnent lieu à cette relation sont du premier système. Les génératrices du second système donnent lieu à la relation

$$X + Y \equiv -\frac{p}{2} - q.$$

Cherchons combien de génératrices de $S_{p'}$ du premier système peuvent appartenir à la surface T_p. Soit XY l'une quelconque d'entre elles; on devra avoir à la fois les deux relations

$$X + Y \equiv \frac{p}{2} + q \quad \text{et} \quad X - Y \equiv p;$$

d'où l'on déduit

$$2X \equiv \frac{3p}{2} + q,$$

relation qui fournit, pour X, les quatre valeurs suivantes :

$$X' \equiv \frac{3p}{4} + \frac{q}{2}, \quad X'' \equiv \frac{3p}{4} + p + \frac{q}{2}, \quad X''' \equiv \frac{3p}{4} + q + \frac{q}{2}, \quad X^{\text{IV}} \equiv \frac{3p}{4} + r + \frac{q}{2};$$

les valeurs correspondantes de Y sont les quatre suivantes :

$$\mathrm{Y}' = \frac{3p}{4} - p + \frac{q}{2}, \quad \mathrm{Y}'' = \frac{3p}{4} + \frac{p}{2}, \quad \mathrm{Y}''' = \frac{3p}{4} + r + \frac{q}{2}, \quad \mathrm{Y}^{\text{iv}} = \frac{3p}{4} + q + \frac{q}{2},$$

valeurs qui sont, deux à deux, égales à celles de X, comme on devait le prévoir.

Il résulte de là que T_p et $S_{p'}$ ont en commun deux génératrices du premier système, savoir :

$$\mathrm{X}'\mathrm{Y}' \quad \text{et} \quad \mathrm{X}'''\mathrm{Y}'''.$$

On a

$$\mathrm{X}' + \mathrm{X}''' = \frac{p}{2};$$

donc les deux génératrices $\mathrm{X}'\mathrm{Y}'$ et $\mathrm{X}'''\mathrm{Y}'''$ sont associées relativement à la surface S_p.

Ce que j'ai dit des génératrices du premier système s'applique également aux génératrices du second système.

D'où la conclusion suivante :

Les surfaces T_p *et* $S_{p'}$ *ont quatre génératrices communes; deux d'entre elles sont d'un même système et sont associées relativement à la surface* S_p, *les deux autres appartiennent à l'autre système de génératrices et sont également associées relativement à la même surface.*

Il est clair que tout ce qui précède s'applique également à la surface S_p. Les quatre génératrices qu'elle a en commun avec la surface T_p sont deux à deux associées par rapport à $S_{p'}$.

15. Considérons maintenant un point quelconque M de la surface $S_{p'}$: les droites qui, passant par ce point, rencontrent à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p, forment, comme je l'ai montré, un cône du second degré.

Ce cône passe par les génératrices (M′) et (M″) de la surface $S_{p'}$ qui se croisent au point M. En effet, il y a sur cette surface deux génératrices de même système que (M′), qui sont en même temps deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p; ces deux droites sont ren-

contrées par (M′), qui se trouve ainsi sur le cône dont je viens de parler. On démontrerait de même que (M″) est située sur ce cône.

Remarquons, maintenant, que ce cône, ayant en commun avec $S_{p'}$ deux génératrices, le coupe, indépendamment de ces deux droites, suivant une section plane. D'où la conclusion suivante :

Si, par un point quelconque de la surface $S_{p'}$, on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p, ces droites forment un cône qui coupe $S_{p'}$ suivant une conique.

14. Cette proposition peut encore être énoncée de la façon suivante :

Étant donnée la surface $S_{p'}$, passant par la biquadratique K, appelons, pour un instant, *points conjugués* de cette courbe les deux points où une génératrice quelconque de T_p rencontre la surface; cela posé, si l'on prend un point M quelconque de $S_{p'}$ et si, par ce point et chacun des couples de points conjugués de K, on fait passer une conique située sur $S_{p'}$, le lieu du point de la conique conjuguée harmoniquement de M, par rapport au couple de points conjugués qu'elle contient, est une conique [*].

15. Supposons que le point M soit situé sur la courbe K, la conique dont je viens de parler passera également par ce point.

En effet, désignons par M′ un point infiniment voisin de M et situé sur la courbe K, par M″ le point conjugué de M′. Si par les trois points M, M′, M″, on fait passer une conique située sur la surface $S_{p'}$, le point de cette conique harmoniquement conjugué de M, relativement au couple de points M′, M″, est infiniment voisin du point M.

La conique passe donc par ce point, et l'on pourrait même déduire de la démonstration précédente que son plan touche la courbe K ;

---

[*] Cette propriété est caractéristique de la surface $S_{p'}$. Lorsque cette surface est une sphère, la courbe K jouit alors de propriétés particulières qui présentent quelque intérêt.

Voir *Bulletin de la Société Philomathique* (Mars 1868) ma Note sur les Cassiniennes planes et sphériques.

mais il est facile de déterminer d'une façon plus précise la position de ce plan.

Examinons de plus près quel est le lieu des droites passant par M et rencontrant à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p.

Par le point M passe une génératrice de T_p; soient g cette génératrice et g' son associée. Toute droite passant par M et s'appuyant sur g' rencontre les deux génératrices associées g et g'; le plan qui contient le point M et g' fait donc partie du lieu cherché. On peut remarquer d'ailleurs que, les génératrices g et g' étant polaires réciproques relativement à la surface S_p, ce plan est précisément le plan tangent à cette dernière surface.

Ce plan faisant partie du lieu qui est en général un cône du second degré, le lieu doit se composer en outre, dans ce cas, d'un second plan.

Il est facile de voir que ce second plan est le plan tangent mené par M tangentiellement à la surface $S_{p'}$. Considérons en effet une des génératrices de cette surface qui passe par M, par exemple celle du premier système (M_1); comme je l'ai montré plus haut, la surface $S_{p'}$ contient deux génératrices du second système qui sont en même temps des génératrices de T_p associées par rapport à S_p; ces deux droites sont rencontrées par (M_1); le même raisonnement s'applique évidemment à la deuxième génératrice de $S_{p'}$ qui passe par le point M. Cela posé, le plan cherché ne peut être que le plan de ces deux génératrices, ou, en d'autres termes, le plan tangent en M à la surface $S_{p'}$.

D'où la conclusion suivante :

Si par un point quelconque M *de la courbe* K, *on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de* T_p *associées par rapport à la surface* S_p, *ces droites sont situées dans le plan mené par le point* M *tangentiellement à la surface* $S_{p'}$.

De même :

Si par un point quelconque M *de la courbe* K, *on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de* T_p *asso-*

ciées par rapport à la surface $S_{p'}$, *ces droites sont situées dans le plan mené par le point* M *tangentiellement à la surface* S_p

Propriété que l'on peut encore énoncer comme il suit :

Étant mené, par un point quelconque M de la courbe K, le plan tangent à la surface S_p, toute droite de ce plan qui, passant par ce point, rencontre une génératrice de T_p, rencontre aussi la génératrice de cette surface qui lui est associée relativement à $S_{p'}$.

16. Considérons maintenant la surface S_p et deux génératrices quelconques, h et h', de T_p associées par rapport à la surface $S_{p'}$, en sorte que h et h' soient des droites polaires réciproques relativement à cette dernière surface.

Je dis que si une droite mobile D est assujettie à rencontrer constamment les deux droites h et h' et à toucher la surface S_p, le lieu de son point de contact est la courbe K.

En effet, étant pris un point quelconque η sur la droite h, il résulte, de la définition même du mouvement de D, que par ce point passent deux droites satisfaisant aux conditions données; à ces deux droites correspondent d'ailleurs deux points de contact η' et η''.

Imaginons le cône circonscrit à S_p et ayant pour sommet le point η; la courbe de contact de ce cône, dont le sommet est sur la droite h, passe d'abord par deux points fixes qui sont les points où S_p est coupée par la polaire de h relativement à cette surface. Ces deux points fixes sont sur la courbe K; car cette polaire est la génératrice de T_p associée de h par rapport à S_p, et l'on sait que cette génératrice s'appuie sur deux points de K.

Abstraction faite de ces deux points fixes, la conique de contact rencontre K en deux points variables; en l'un de ces points α menons le plan tangent; ce plan coupe la droite h au point η; d'ailleurs la droite $\alpha\eta$, étant située dans le plan mené par α tangentiellement à la surface S_p et rencontrant h, doit rencontrer h'; le point α se confond donc avec l'un des deux points η' et η''.

Le lieu de ces derniers points est donc la courbe K.

D'où la proposition suivante :

Étant données la surface S_p *et deux génératrices quelconques de* T_p

associées relativement à la surface $S_{p'}$, *si une droite mobile est assujettie à rencontrer constamment les deux génératrices et à toucher* S_p, *le lieu des points de contact est la courbe* K.

17. Il résulte de ce qui précède qu'étant donnée une biquadratique quelconque K, on peut l'engendrer de la façon indiquée par le théorème de M. Chasles, au moyen d'une quelconque des six surfaces

$$S_p,\ S_{p'};\quad S_q,\ S_{q'};\quad S_r,\ S_{r'}$$

que j'ai précédemment définies.

Ayant pris une de ces surfaces, l'on peut encore choisir d'une infinité de façons le couple de droites fixes qui, avec la surface, déterminent le mode de génération de la courbe.

18. Les surfaces réglées du quatrième ordre, que j'ai rencontrées dans cette recherche, T_p, T_q et T_r, ne sont autre chose, comme il est facile de le voir, que les surfaces étudiées précédemment par M. de la Gournerie, sous le nom de *quadricuspidales limites* [*].

Une telle surface contient deux droites doubles; T_p, par exemple, a pour droites doubles les deux arêtes OP et QR du tétraèdre conjugué formé par les sommets des quatre cônes qui passent par la courbe K.

Par chacun des points de l'une de ces arêtes passent deux génératrices de la surface; si l'on désigne respectivement par x et y les points où une quelconque de ces deux génératrices s'appuie sur OP et sur QR, on voit qu'à chaque position du point x correspondent deux positions du point y, et réciproquement. Les points x et y tracent donc, sur les droites doubles OP et OQ, ce qu'on peut appeler des *divisions homographiques du second ordre;* mais ici ces divisions sont d'une espèce particulière et jouissent d'une propriété remarquable entièrement caractéristique.

L'on a en effet cette proposition :

Étant donné un point x' situé sur la droite OP, si y' et y'' désignent les deux points qui lui correspondent sur la droite OQ, les points y' et

[*] Voir *Recherches sur les surfaces tétraédrales symétriques*, p. 85.

y'' ont pour correspondants le point x' et un autre et même point x''; de telle sorte que le point x'' a aussi pour correspondants les points y' et y''.

M. Chasles, qui, le premier, a signalé ce mode de correspondance remarquable, a montré que, si elle avait lieu pour une position particulière du point x', elle avait lieu nécessairement pour toute autre position de ce point.

Appelons α et β les points où la droite OP coupe une quelconque des surfaces du second ordre V que l'on peut mener par K, et γ et δ les points où QR rencontre cette même surface. Les droites OP et QR étant polaires réciproques par rapport à cette surface, γ et δ sont précisément les points de contact des plans menés par OP tangentiellement à V.

Les droites $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ et $\beta\delta$ sont des génératrices de cette surface, et chacune d'elles, rencontrant par suite en deux points la courbe K, en même temps qu'elle s'appuie sur les deux droites OP et QR, est une génératrice de la surface réglée T_p; il est clair maintenant qu'à chacun des points α et β de la droite OP correspondent les deux points γ et δ de la droite OQ.

La correspondance qui existe entre les points de division sur ces deux droites est donc de l'espèce particulière dont j'ai parlé plus haut.

La réciproque est évidente, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

« Si, sur deux droites fixes, on a deux divisions qui se correspondent de telle façon qu'à un point quelconque d'une des droites correspondent deux points de la seconde; si, en outre, le mode de correspondance est tel, qu'un même couple de points de l'une des droites corresponde à deux mêmes points de l'autre, les droites joignant les couples de points correspondants forment une surface réglée du quatrième ordre, de l'espèce de celles que M. de la Gournerie a désignées sous le nom de *quadricuspidales limites*.

19. Ces dernières surfaces sont une variété de surfaces réglées du huitième ordre, que le même géomètre a étudiées sous le nom de *quadricuspidales*.

Elles peuvent se définir très-simplement de la manière suivante :

Considérons une biquadratique K et une surface réglée quelconque dont chacune des génératrices s'appuie en deux points sur la courbe. Soient X et Y les points où l'une de ces génératrices rencontre K, et X', Y' les points analogues pour la génératrice infiniment voisine : on peut se demander comment la surface doit être particularisée, afin que les droites XY' et X'Y soient des génératrices infiniment voisines d'une même surface du second ordre passant par K.

Faisons pour un instant

$$X' \equiv X + dX,$$
$$Y' \equiv Y + dY;$$

pour que XY' et X'Y soient les génératrices d'une même surface du second ordre, on doit avoir

$$X + Y' \equiv Y + X',$$

ou bien

$$X + Y + dY \equiv Y + X + dX,$$

ou enfin

$$dY \equiv dX,$$

et, en intégrant,

$$Y - X \equiv a,$$

a désignant une quantité constante.

La surface engendrée par une droite XY, s'appuyant sur la courbe K en deux points X et Y satisfaisant à la relation précédente, est la quadricuspidale ; je dirai, pour abréger, que K est la base de la quadricuspidale.

Une propriété très-simple et entièrement caractéristique de cette surface résulte immédiatement de la relation précédente.

Soient XY et X'Y' deux génératrices quelconques d'une quadricuspidale, on a

$$Y - X \equiv a \quad \text{et} \quad Y' - X' \equiv a,$$

relation d'où l'on déduit

$$Y + X' \equiv Y' + X;$$

d'où la proposition suivante :

Étant données deux génératrices quelconques XY *et* X'Y' *d'une quadricuspidale ayant pour base une biquadratique* K, *les deux droites* XY' *et* YX' *sont deux génératrices d'un même système d'une surface du second ordre.*

20. Soient deux génératrices infiniment voisines XY et X'Y' d'une quadricuspidale G ayant pour base K; d'après ce qui précède, XY' et Y'X sont les génératrices d'une même surface de second ordre passant par K.

Par XY menons un plan quelconque L et cherchons le point où ce plan est tangent à la surface G. A cet effet, projetons les deux génératrices sur un plan perpendiculaire au plan L; soient respectivement ξ, η, ξ' et η' les projections sur ce plan des points X, Y, X' et Y'; τ le point d'intersection des deux droites $\xi\eta$ et $\xi'\eta'$, ω celui où se coupent les droites $\xi\eta'$ et $\eta\xi'$. Les points τ et ω ont évidemment pour limites les points de contact du point L avec la surface quadricuspidale et avec la surface du second ordre passant par K et par la droite XY; d'ailleurs on voit immédiatement, en considérant la figure formée sur la projection, que ces points limites divisent harmoniquement le segment $\xi\eta$.

On en conclut la proposition suivante d'un fréquent usage dans les applications :

Étant données une quadricuspidale ayant pour base une courbe K *et une génératrice* XY *de cette surface, si l'on considère en même temps la surface du second ordre qui passe par* K *et par* XY, *tout plan mené par cette dernière droite touche la quadricuspidale et la surface du second ordre en deux points qui partagent harmoniquement le segment* XY.

Soient L le plan mené par XY et Y, Z les deux points où ce plan coupe la courbe K; YZ est la deuxième génératrice de la surface du second ordre située dans le plan; le plan de rencontre T des droites YZ et XY

est le point où se touchent ce plan et cette surface; son conjugué harmonique, relativement au segment XY, est donc, d'après ce qui précède, le point où le plan L touche la quadricuspidale.

21. Une quadricuspidale a quatre lignes doubles. En effet, soit XY une génératrice de cette surface; prenons un quelconque des sommets des cônes qui passent par la base K, le point O par exemple. Joignons X et Y au point O, et soient X', Y' les points où les droites ainsi obtenues rencontrent K; on a les trois congruences suivantes :

$$Y - X \equiv a, \quad X + X' \equiv 0, \quad Y + Y' \equiv 0,$$

d'où l'on déduit

$$Y' - X' \equiv a.$$

La droite Y'X' est donc une deuxième génératrice de la surface; appelons Ω le point d'intersection des droites YX et Y'X'. On voit que Ω est un point double de la surface; ce point, d'après la façon même dont on l'a construit, est d'ailleurs évidemment dans le plan des trois sommets PQR. Lors donc que la génératrice XY se déplacera, il engendrera une ligne double de la surface située dans ce plan.

En considérant de même les autres sommets du tétraèdre OPQR, on verrait que la surface possède en tout quatre lignes doubles situées dans chacune des faces de ce tétraèdre.

La surface ne peut d'ailleurs avoir d'autre ligne double (sauf la base K); car, comme il est facile de le voir par un calcul très-simple, X'Y' et les trois droites analogues correspondant aux sommets P, Q et R sont les seules génératrices de la surface qui rencontrent une génératrice donnée XY, en outre de celles qui passent par les points X et Y eux-mêmes.

Revenons maintenant à la nature de ces lignes doubles.

Soit (Ω) la courbe décrite par le point Ω dans le plan PQR. Appelons ω le point de rencontre des droites XY' et YX'; joignons Oω, et désignons par γ et γ' les points où cette droite rencontre XY et X'Y'.

D'après ce que j'ai dit dans le paragraphe précédent, le plan OXY touche la quadricuspidale aux points γ et γ'; ce point est donc dou-

blement tangent à la surface, l'arête de contact étant la droite $O\omega$. Le cône, enveloppé par ces plans tangents doubles, qui passent tous par O, est un cône du second degré; on le démontre facilement en faisant voir que, par toute droite telle que OX, on ne peut mener que deux plans tangents à ce cône.

Le point ω est la trace sur le plan PQR de l'arête $O\omega$ de ce cône; ce point se déplace donc donc sur une conique (ω).

Remarquons maintenant que la droite $\omega\Omega$ est la tangente à cette conique; en considérant la figure [*], on voit immédiatement que le segment $\omega\Omega$ est partagé harmoniquement par le cône qui a pour sommet O et pour base K.

D'où l'on conclut la proposition suivante :

Soient (ω) *la trace sur le plan* PQR *du cône doublement circonscrit à la surface ayant pour sommet le point* O, *et* (O) *la trace sur le même plan du cône qui, ayant le même sommet, passe par la courbe* K : *la ligne double de la quadricuspidale, située dans le plan* PQR, *peut s'obtenir en prenant, sur chacune des tangentes menées à la courbe* (ω), *le point conjugué harmonique du point de contact par rapport au segment intercepté sur la tangente par la courbe* (O).

22. Les surfaces quadricuspidales se présentent dans un grand nombre de questions relatives aux biquadratiques gauches ou aux courbes du troisième ordre.

Elles fournissent par exemple, une solution très-simple de ce problème que l'on rencontre dans l'application des fonctions elliptiques aux courbes du troisième ordre :

Étant donnée une courbe du troisième ordre C, *trouver des courbes telles, que la tangente menée en un quelconque de leurs points soit partagée harmoniquement par le point de contact et par les trois points où elle coupe* C.

Ces courbes sont algébriques; on peut facilement les décrire dans le plan lui-même, mais la construction suivante se prête peut-être mieux à l'étude de leurs propriétés.

---

[*] Le lecteur est prié de suppléer à la figure.

Prenons deux points quelconques de C et joignons-les à un point O de l'espace; par les deux droites ainsi obtenues, faisons passer une surface du second ordre A.

Le cône, ayant pour sommet O et passant par C, coupe A suivant une biquadratique K.

Imaginons une quelconque des surfaces quadricuspidales qui ont pour base K, le cône circonscrit à cette surface et ayant pour sommet O coupera le plan de C suivant une courbe jouissant de la propriété indiquée.

En considérant les diverses quadricuspidales qui ont pour base K, on obtiendrait la solution complète du problème.

25. Toutes les autres propriétés de la quadricuspidale se déduiraient également avec facilité de la définition très-simple que j'en ai donnée plus haut.

Je ne m'étendrai pas davantage à ce sujet, me contentant de renvoyer le lecteur à l'ouvrage déjà mentionné de M. de la Gournerie.

Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de deux cubes rationnels;

Par le P. PEPIN, S. J.

Le problème de la décomposition d'un entier A en une somme de deux cubes rationnels se ramène évidemment à celui de résoudre en nombres entiers et différents de zéro l'équation indéterminée

$$(1) \qquad x^3 + y^3 = Az^3.$$

On peut aussi le regarder comme un point particulier de la théorie des formes cubiques à trois indéterminées, celui où l'on chercherait les représentations de zéro par la forme cubique donnée

$$x^3 + y^3 - Az^3.$$

L'impossibilité de l'équation (1), quand $A = 1$, est un théorème de Fermat démontré depuis longtemps par Euler (*Algèbre*, 2e Partie, Ch. XV).

Le second supplément à la *Théorie des nombres*, p. 29 [*], nous apprend que l'équation (1) est encore impossible quand on prend pour A l'un des nombres 2^m, 3 ou 5. Legendre ajoute qu'en appliquant la même méthode au nombre 6, on démontrerait que ce nombre est indécomposable en deux cubes rationnels; mais en cherchant à faire cette démonstration j'ai trouvé qu'on vérifie l'équation (1)

$$x^3 + y^3 = 6z^3$$

en faisant $x = 17$, $y = 37$, $z = 21$. Du reste, cette solution se trouve

[*] *Voyez* aussi la 3e édition de Legendre, 4e Partie, nos 330 à 334.

dans l'étude intéressante de Lamé sur les propriétés du binôme cubique (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXI).

Une question des *Nouvelles Annales* proposée, je crois, par M. Sylvester, énonce quelques-uns des cas d'impossibilité auxquels je suis parvenu dans ce Mémoire : je regrette de ne pas pouvoir la citer textuellement.

Legendre fait aussi remarquer qu'une solution de l'équation (1) permet d'en obtenir une infinité d'autres; car si cette équation est vérifiée par des valeurs entières $x = a$, $y = b$, $z = c$, elle le sera encore par les valeurs

$$x = a(2b^3 + a^3), \quad y = -b(2a^3 + b^3), \quad z = c(a^3 - b^3).$$

Enfin, pour donner aux théorèmes qui vont nous occuper toute la généralité qu'ils comportent, il faut se rappeler que, si le nombre A est indécomposable en deux cubes rationnels, il en sera de même pour le produit Am^3, m désignant un nombre rationnel quelconque. Par conséquent si l'impossibilité de l'équation (1) est démontrée pour une valeur particulière $A = p^\alpha$, elle se trouve démontrée pour toutes les valeurs de A comprises dans la formule

$$A = p^{3m+\alpha},$$

m étant entier et positif.

Si l'on ajoute aux théorèmes qui précèdent les propriétés du binôme cubique, trouvées par Lamé, et particulièrement les identités remarquables qui terminent la première partie de son Mémoire (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXI, p. 924), on aura, à très-peu près, tout ce qu'on connaît aujourd'hui sur la solution, en nombres entiers, de l'équation cubique

$$x^3 + y^3 = Az^3.$$

On pourrait aussi rapprocher de cette question quelques problèmes analogues résolus soit par Euler, soit par Libri, soit par M. Le Besgue. Euler, à l'endroit cité de son *Algèbre*, donne une méthode pour obtenir une infinité de cubes entiers partagés chacun en trois cubes entiers. Libri a démontré (*Savants étrangers*, t. V, p. 71) que « tout

nombre positif est la somme de quatre cubes rationnels et positifs. » Enfin, M. Le Besgue, complétant un travail de Dirichlet, a démontré dans ce Journal (1843, t. VIII, p. 49) pour l'équation du cinquième degré plusieurs théorèmes généraux analogues à ceux qui font le sujet de ce Mémoire.

Après avoir indiqué les travaux faits jusqu'à ce jour sur la question qui m'occupe, j'ajouterai un mot sur la méthode que j'ai suivie et sur les résultats auxquels je suis parvenu. Ma méthode consiste à joindre quelques considérations sur les résidus cubiques à la décomposition employée par Euler et par Legendre dans les cas particuliers qu'ils ont résolus. J'ai pu démontrer ainsi les théorèmes renfermés dans cet énoncé général :

« Désignons par p et q deux nombres premiers dont les formes linéaires respectives sont $18m+5$, $18m+11$; il est impossible de décomposer en deux cubes rationnels aucun des nombres compris dans les formules suivantes :

$$p^m,\ q^m,\ 2p^{3m+1},\ 2q^{3m+2},\ 4p^{3m+2},\ 4q^{3m+1},$$
$$9p^{3m+1},\ 9q^{3m+1},\ 9p^{3m+2},\ 9q^{3m+2},\ 5p^{3m+2},\ 5q^{3m+1},\ 25p^{3m+1},\ 25q^{3m+2},$$

dans lesquelles m désigne un nombre entier quelconque positif ou nul.

Quoique mon but principal ait été de trouver les formes générales des valeurs de A qui rendent impossible l'équation (1), j'ai cru devoir terminer mon Mémoire en énonçant quelques théorèmes affirmatifs, et entre autres les deux suivants qui semblent nouveaux :

Le double d'un nombre triangulaire est toujours la somme de deux cubes rationnels;

Si la somme ou la différence de deux nombres est un cube, leur produit est la somme algébrique de deux cubes rationnels.

Puisse l'intérêt qui s'attache aux travaux dont Legendre a enrichi la science des nombres, mériter à ce Mémoire l'attention bienveillante des géomètres.

§ I.

1. Supposons d'abord que le nombre A n'ait aucun facteur premier $6m + 1$.

L'équation

$$(1) \qquad x^3 + y^3 = Az^3$$

se décompose de l'une des manières suivantes :

$$(2) \qquad x + y = Au^3, \quad x^2 - xy + y^2 = v^3,$$

si Az est premier à 3;

$$(3) \qquad x + y = \frac{1}{3}Au^3, \quad x^2 - xy + y^2 = 3v^3,$$

si Az est divisible par 3. La raison de cette décomposition est que le quotient

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y}$$

n'admet que des facteurs premiers $6m + 1$, et en outre la première puissance de 3, lorsque la somme $x + y$ est divisible par 3.

2. Soit d'abord Az pair. Comme nous supposons x, y et z sans diviseur commun, x et y seront impairs, et la seconde équation (2) pourra s'écrire

$$(2') \qquad \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = v^3.$$

Chacun des facteurs de v est lui-même de la forme $x^2 + 3y^2$, car cette forme est l'unique forme réduite proprement primitive pour le déterminant -3 : on sait aussi que le nombre des représentations propres de v^3 par cette forme est le même que celui des représentations de v, et que toutes ces représentations de v^3 peuvent se déduire de celles du nombre v, par l'équation

$$X + \sqrt{-3}Y = (f + \sqrt{-3}g)^3 = f(f^2 - 9g^2) + \sqrt{-3}.3g(f^2 - g^2),$$

dans laquelle on suppose $v = f^2 + 3g^2$. Comme les deux nombres $\frac{x+y}{2}$, $\frac{x-y}{2}$ sont entiers et premiers entre eux, la représentation (2′) de v^3 doit se déduire de la dernière équation en choisissant convenablement la représentation $f^2 + 3g^2$ de v, et l'on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x+y}{2} = \frac{Au^3}{2} = f(f^2 - 9g^2), \\ &\frac{x-y}{2} = 3g(f^2 - g^2), \quad f^2 + 3g^2 = v. \end{aligned}\right.$$

On verra de même que, si Az est divisible par 3, la deuxième équation (3) peut s'écrire

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2 = v^3,$$

et qu'elle entraîne les équations suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x-y}{2} = f(f^2 - 9g^2), \\ &\frac{x+y}{6} = \frac{Au^3}{18} = 3g(f^2 - g^2), \quad f^2 + 3g^2 = v. \end{aligned}\right.$$

5. Supposons que le produit Az soit impair. Les équations (2) et (3) peuvent s'écrire respectivement sous les deux formes

$$\left(\frac{2x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2}\right)^2 = v^3, \quad \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2x-y}{6}\right)^2 = v^3,$$

et elles entraînent respectivement les équations suivantes :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2x-y}{2} = f(f^2 - 9g^2), \quad \frac{y}{2} = 3g(f^2 - g^2), \\ &x + y = F + 3G, \quad f^2 + 3g^2 = v; \end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{y}{2} = f(f^2 - 9g^2), \quad \frac{2x-y}{6} = 3g(f^2 - g^2), \\ &x + y = 3(F + G), \quad f^2 + 3g^2 = v, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles nous posons, pour abréger,

$$f(f^2 - 9g^2) = \mathrm{F}, \quad \mathrm{G} = 3g(f^2 - g^2).$$

Puisque nous supposons x et y premiers entre eux, les deux nombres f et g n'ont aucun diviseur commun; de plus l'un d'eux est pair et l'autre impair, et g seul peut être divisible par 3. Les deux dernières propriétés résultent de l'équation

$$f^2 + 3g^2 = v,$$

où le nombre v est de la forme $6m + 1$. Enfin G est toujours le multiple de g.

4. Nous allons chercher les conséquences des formules précédentes pour le cas où le nombre A est premier avec 3. Si, dans ce cas, z est impair et multiple de 3, on a les équations (3) et (7) dans lesquelles u doit être divisible par 3. Posons $u = 3u_1$; l'équation

$$x + y = \mathrm{A}.27.u_1^3 = 3(\mathrm{F} + \mathrm{G})$$

donne

$$9\mathrm{A}u_1^3 = f(f^2 - 9g^2) + 3g(f^2 - g^2),$$

ce qui est impossible, f étant premier à 3. Donc :

Théorème I. — *Si tous les diviseurs impairs du nombre* A *sont de la forme* $6m - 1$, *et qu'on puisse résoudre l'équation* (1) *en nombres entiers premiers entre eux, le nombre* z *ne peut être divisible par* 3 *sans être pair.*

Supposons donc z impair et premier à 3. Dans ce cas l'équation (1) donnera les équations (2) et (6), d'où l'on déduira

$$x + y = \mathrm{A}u^3 = \mathrm{F} + 3\mathrm{G}, \quad \text{et} \quad x - y = \mathrm{F} - \mathrm{G}.$$

Si dans la première nous supprimons les multiples de 9, en remarquant que le cube d'un nombre n premier à 3 est toujours un multiple de 9 plus ou moins 1, elle devient

$$\mathrm{A} \equiv \pm 1 \pmod{9}.$$

On a aussi

$$2y = 4G = 12g(f^2 - g^2) \equiv 0 \pmod{36}.$$

De ces deux congruences, en ayant égard au premier théorème, on déduit :

Théorème II. — 1° *Si le nombre* A *est de l'une des formes* $18m \pm 5$, $18m \pm 11$, *l'équation* (1) *ne peut être vérifiée en nombres entiers, sans que* z *soit un nombre pair.*

2° *Si le nombre* A *est de l'une des deux formes* $18m + 1$, $18m + 17$, *et que dans l'équation* (1) z *soit un nombre impair, l'un des deux autres nombres* x, y *est en même temps pair et divisible par* 9.

5. Si le produit Az est pair, l'équation (1) donnera les équations (2) et (4), ou les équations (3) et (5), suivant que z sera premier à 3 ou divisible par 3. Dans le premier cas, l'équation $\frac{x-y}{2} = 3g(f^2 - g^2)$ donne la congruence

$$x \equiv y \pmod{9}.$$

L'équation (1) donnera, par suite,

$$Az^3 \equiv 2x^3 \pmod{9}, \quad A \equiv \pm 2 \pmod{9}.$$

Dans le deuxième cas, l'équation

$$\frac{Au^3}{18} = 3g(f^2 - g^2)$$

ne peut subsister sans que le nombre u soit divisible par 9. Nous avons donc ce théorème :

Théorème III. — *L'un des deux nombres* A *ou* z *étant pair, si* z *est divisible par* 3, *il est aussi divisible par* 9 ; *si au contraire* z *est premier à* 3, *le nombre* A *doit être de l'une des formes*

$$18m + (2, 7, 11, \text{ou } 16).$$

§ II.

6. Pour déduire quelques conséquences des résultats obtenus jusqu'ici, nous considérerons successivement le cas où le nombre A est une puissance d'un nombre premier $6m - 1$, et celui où il est le produit d'une semblable puissance multipliée par une puissance de 2. De plus nous considérerons immédiatement parmi les diverses solutions possibles, celle où la valeur numérique de z est la plus petite possible ; de telle sorte qu'une hypothèse sera toujours rejetée comme impossible, lorsqu'elle ramènera l'équation (1) résolue en nombres inférieurs à cette valeur *minima* de z.

Supposons d'abord que le nombre A soit égal à l'un des nombres p, q, p^2, q^2. Il sera de l'une des formes $18m + (5, 7, 11 \text{ ou } 13)$. Dans ce cas le deuxième théorème nous apprend que le nombre z doit être pair. Si de plus z est divisible par 3, l'équation (1) entraînera comme conséquence les équations (3) et (5), et l'on aura

$$u = 3u_1, \quad Au_1^3 = 2g(f+g)(f-g).$$

Comme les trois facteurs $2g, f+g, f-g$ sont premiers entre eux, leur produit Au^3 se décomposera de l'une des manières suivantes :

$$2g = A\alpha^3, \quad f+g = \beta^3, \quad f-g = \gamma^3, \quad u_1 = \alpha\beta\gamma,$$
$$2g = \alpha^3, \quad f \pm g = A\beta^3, \quad f \mp g = \gamma^3.$$

On en déduit respectivement les équations

$$A\alpha^3 = \beta^3 + (-\gamma)^3, \quad A\beta^3 = \gamma^3 + (\pm\alpha)^3,$$

qui ne sont autres que l'équation (1) résolue en attribuant aux indéterminées des valeurs α, β, γ toutes inférieures au *minimum* de $z = 3\alpha\beta\gamma.\nu$.

Il faut donc supposer z premier à 3 ; mais alors l'équation (1) entraîne comme conséquence les équations (2) et (4), et l'on a

$$Au^3 = 2f(f+3g)(f-3g).$$

Les trois facteurs $2f, f+3g, f-3g$ étant premiers entre eux, et le nombre A étant une puissance d'un nombre premier, on ne peut avoir que l'une des décompositions suivantes :

$$2f = A\alpha^3,\quad f+3g=\beta^3,\quad f-3g=\gamma^3,\quad u=\alpha\beta\gamma,$$
$$2f=\alpha^3,\quad f\pm 3g = A\beta^3,\quad f\mp 3g=\gamma^3,$$

qui donnent respectivement les deux équations

$$A\alpha^3=\beta^3+\gamma^3,\quad A\beta^3=\alpha^3+(-\gamma)^3.$$

On vérifierait donc l'équation (1) en attribuant aux indéterminées des valeurs α, β, γ toutes inférieures à la valeur *minima* de $z=\alpha\beta\gamma.v$. L'hypothèse est donc impossible.

Puisqu'il n'y a pas de milieu entre ces deux hypothèses, z multiple de 3, ou z premier à 3, nous avons ce théorème :

THÉORÈME IV. — *Si nous désignons par p un nombre premier $18m+5$, et par q un nombre premier $18m+11$, aucun des nombres p, p^2, q, q^2 n'est décomposable en une somme de deux cubes rationnels.*

7. Considérons l'équation de Fermat $x^3+y^3=z^3$.

Comme z désigne l'un quelconque des trois nombres, nous pouvons le supposer impair. Puis, remarquant que la valeur $A=1$ satisfait aux conditions du premier paragraphe, nous concluons du premier théorème que z est premier à 3, et du second, que l'un des deux nombres x ou y est multiple de 18. Nous avons donc

$$z^3-x^3=2^3.9^3u^3v^3,$$

d'où

$$z-x=2^3.3^5u^3,\quad \left(\frac{z+x}{2}\right)^2+3\left(\frac{z-x}{6}\right)^2=v^3=F^2+3G^2.$$

En répétant le raisonnement employé au n° **2**, nous concluons que

$$\frac{z+x}{2}=F,\quad \frac{z-x}{6}=G,\quad \text{ou}\quad 2^2.3^4u^3=3g(f^2-g^2).$$

Or, les trois facteurs $g, f+g, f-g$ étant premiers entre eux, la dernière équation ne peut se décomposer que de l'une des manières suivantes :

$$g = 2^2.3^3\alpha^3,\quad f+g = \beta^3,\quad f-g = \gamma^3,$$
$$g = 2^2\alpha^3,\quad f\pm g = 3^3\beta^3,\quad f\mp g = \gamma^3;$$

on en déduit respectivement les deux équations

$$\beta^3 - \gamma^3 = 2g = (2.3\alpha)^3$$
$$(3\beta)^3 - \gamma^3 = \pm 2g = (\pm 2\alpha)^3.$$

Or nous pouvons supposer que, dans la solution considérée, z est le plus petit des deux nombres impairs et qu'il a la plus petite valeur possible. Puisque nous déduisons de cette solution *minima* une autre solution en nombres tous inférieurs à $z = 18\alpha\beta\gamma.\nu$, nous concluons que l'équation est impossible. Donc :

Théorème V. — *Aucun cube n'est égal à la somme de deux cubes.*

8. Supposons $A = 2^\mu a$, en désignant par μ l'un des nombres 1 ou 2, et par a l'un des nombres premiers p, q, ou de leurs carrés p^2, q^2.

Si $\mu = 1$, les valeurs de A sont respectivement des quatre formes $18m + (10, 4, 14, 8)$; le nombre z doit donc être multiple de 3 et même de 9. (Théorème III.)

Soit $\mu = 2$. Les nombres $4p$, $4q$, $4p^2$, $4q^2$ sont respectivement des quatre formes $18m + (2, 8, 10, 16)$; nous concluons donc du troisième théorème que, si A est l'un des nombres $4q$, $4p^2$, z doit être multiple de 9. Donc :

« 1° Si A désigne l'un des nombres $2p$, $2q$, $2p^2$, $2q^2$, $4q$, $4p^2$, l'équation (1) ne peut être résolue en nombres entiers qu'en faisant z multiple de 3. »

La décomposition en facteurs de l'équation (1) donne alors les équations (3) et (5), dont la dernière

$$\frac{x+y}{6} = \frac{Au^3}{18} = 3g(f^2 - g^2$$

devient

$$2^{\mu-1} a u_1^3 = g(f^2 - g^2)$$

en posant

$$u = 3u_1.$$

Cette équation se décompose nécessairement de l'une des manières suivantes :

$$g = 2^{\mu-1} a \alpha^3, \quad f + g = \beta^3, \quad f - g = \gamma^3,$$
$$g = 2^{\mu-1} \alpha^3, \quad f \pm g = a\beta^3, \quad f \mp g = \gamma^3;$$

et l'on obtient respectivement les deux équations

$$\beta^3 + (-\gamma)^3 = A\alpha^3, \quad \gamma^3 \pm 2^\mu \alpha^3 = a\beta^3.$$

La première n'est autre que l'équation (1) vérifiée en égalant les indéterminées à des diviseurs α, β, γ de la plus petite valeur possible de z; on doit donc la rejeter. Quant à la seconde, comme l'un des nombres α, β, γ est multiple de 3, elle donne l'une des congruences

$$2^\mu \pm 1 \equiv 0, \quad a \equiv \pm 1, \quad a \equiv \pm 2^\mu \pmod{9}.$$

La première est impossible; la seconde l'est également lorsqu'on désigne par a l'un des nombres p, q, p^2, q^2, ainsi que nous le faisons. Pour la troisième, il faut distinguer les deux valeurs de μ. Si $\mu = 1$, le nombre a doit être de l'une des deux formes $18m + 11$, $18m + 7$, ce qui exclut les deux valeurs p, q^2. Si $\mu = 2$, a doit être de l'une des deux formes $18m + 13$, $18m + 5$, ce qui exclut p^2 et q. Donc :

2° « Si A désigne l'un des nombres $2p$, $2q^2$, $4q$, $4p^2$, l'équation (1) ne peut être vérifiée en faisant z multiple de 3. »

Si nous réunissons les deux conclusions 1° et 2°, nous avons ce théorème :

THÉORÈME VI. — *Aucun des nombres $2p$, $2q^2$, $4p^2$, $4q$ ne peut se décomposer en une somme de deux cubes rationnels.*

§ III.

9. Supposons $A = 3^{\lambda} 2^{\mu} a$, a désignant encore une puissance d'un nombre premier $6m - 1$, μ l'un des nombres 0, 1, 2, et λ l'un des nombres 1 ou 2.

1° Soit $\lambda = 1$. Comme la somme $x^3 + y^3$ ne peut être divisible par 3 sans l'être par 9, il faut que z soit multiple de 3, de telle sorte que l'équation (1) se décomposera de la manière suivante :

$$x + y = 27 . 2^{\mu} a u^3, \quad x^2 - xy + y^2 = 3v^3, \quad z = 3uv.$$

On peut obtenir, dans ce cas, certaines conditions que les indéterminées doivent remplir, mais aucun caractère général d'impossibilité.

2° Soit $\lambda = 2$. L'équation (1) se décomposera de la manière suivante :

$$x + y = 3 . 2^{\mu} a . u^3, \quad x^2 - xy + y^2 = 3v^3, \quad z = uv, \quad f^2 + 3g^2 = v.$$

Supposons d'abord $\mu = 0$, et z impair. L'un des deux nombres x ou y devant être pair, nous ferons $y = 2t$. La seconde équation pourra s'écrire

$$\left(\frac{2x - y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2}\right)^2 = 3v^3, \quad \text{ou} \quad t^2 + 3\left(\frac{x - t}{3}\right)^2 = v^3 = F^2 + 3G^2;$$

et, en répétant le raisonnement que nous avons fait (n° **2**), nous concluons

$$t = F, \quad \frac{x - t}{3} = G = 3g(f^2 - g^2);$$

d'où

$$G + F = \frac{x + 2t}{3} = au^3.$$

Mais G est divisible par 9, tandis que $F \equiv f^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$; donc l'équation précédente, réduite à une congruence suivant le module 9, devient

$$a \equiv \pm 1 \pmod{9}.$$

Donc, « si le nombre a est de l'une des quatre formes p, q, p^2, q^2, l'équation

$$x^3 + y^3 = 9az^3$$

ne peut être vérifiée par aucune valeur impaire de z. »

10. Il résulte de là que, quel que soit μ, les deux nombres x et y sont nécessairement impairs, et que l'équation

$$x^2 - xy + y^2 = 3v^3$$

s'écrit de la manière suivante :

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 3v^3, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2 = v^3 = \mathrm{F}^2 + 3\mathrm{G}^2.$$

Le raisonnement précédemment indiqué nous donnera

$$\frac{x-y}{2} = \mathrm{F}, \quad \frac{x+y}{6} = \frac{2^{\mu}\cdot a u^3}{2} = \mathrm{G} = 3g(f^2 - g^2).$$

Décomposons de toutes les manières possibles la dernière équation, en remarquant que les trois facteurs $2g$, $f+g$, $f-g$ sont premiers entre eux ; nous obtenons l'un des systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll}
2^{\mu} a\alpha^3 = 6g, & \beta^3 = f+g, & \gamma^3 = f-g, \\
2^{\mu}\alpha^3 = 6g, & a\beta^3 = f \pm g, & \gamma^3 = f \mp g, \\
2^{\mu}\alpha^3 = 2g, & \dfrac{a\beta^3}{3} = f \pm g, & \gamma^3 = f \mp g, \\
2^{\mu}\alpha^3 = 2g, & a\beta^3 = f \pm g, & \dfrac{\gamma^3}{3} = f \mp g, \\
2^{\mu} a\alpha^3 = 2g, & \dfrac{\beta^3}{3} = f \pm g, & \gamma^3 = f \mp g ;
\end{array}$$

d'où l'on déduit respectivement ces cinq équations :

$$9\cdot 2^{\mu} a\alpha_1^3 = \beta^3 + (-\gamma)^3, \quad \pm 9\cdot 2^{\mu}\alpha_1^3 = a\beta^3 - \gamma^3, \quad \pm 2^{\mu}\alpha^3 = 9a\beta_1^3 - \gamma^3,$$
$$\pm 2^{\mu}\alpha^3 = a\beta^3 - 9\cdot\gamma_1^3, \quad \pm 2^{\mu} a\alpha^3 = 9\beta_1^3 - \gamma^3,$$

dans lesquelles nous posons $3\alpha_1 = \alpha$, $3\beta_1 = \beta$, $3\gamma_1 = \gamma$.

La première équation doit être rejetée, parce qu'elle est de même

forme que l'équation proposée, et que les valeurs α_1, β, $-\gamma$ des indéterminées sont des diviseurs de la valeur minima de z. La seconde doit être aussi rejetée si a désigne l'un des nombres p, q, p^2, q^2, parce qu'elle se réduit à la congruence

$$a \mp 1 \equiv 0 \pmod{9},$$

qui est impossible dans cette hypothèse. La troisième doit être rejetée pour la même raison que la première si $\mu = 0$, et, dans le cas contraire, parce qu'elle donne la congruence impossible

$$2^{\mu} \equiv \pm 1 \pmod{9}, \quad (\mu = 1 \text{ ou } 2).$$

Restent donc les deux dernières, qui se réduisent aux deux congruences

$$\text{(B)} \qquad 2^{\mu} \equiv \pm a \pmod{9}, \quad 2^{\mu} a \equiv \pm 1 \pmod{9},$$

pour lesquelles il faut distinguer la valeur de μ. Quand $\mu = 0$, elles sont l'une et l'autre impossibles, si a est de l'une des quatre formes supposées p, q, p^2, q^2. Donc :

Théorème VII. — *Aucun des nombres $9p$, $9q$, $9p^2$, $9q^2$ ne peut se décomposer en une somme de deux cubes rationnels.*

Dans le cas où μ est égal à l'un des nombres 1 ou 2, les congruences (B) n'excluent que les deux formes $18m + (1, 17)$. Mais il faut nous rappeler que, si le nombre a est de l'une de ces deux formes, la seconde décomposition cesse d'être impossible. Ainsi la considération du facteur 2 ne fournit aucun caractère d'impossibilité.

§ IV.

11. On reconnaît aisément, au moyen du théorème de Fermat $a^5 - a \equiv 0 \pmod{5}$, que le produit

$$fg(f^2 + g^2)(f^2 - g^2)$$

est toujours multiple de 5; d'où nous pouvons conclure que l'un des

deux nombres

$$f(f^2 - 9g^2), \quad 3g(f^2 - g^2)$$

est nécessairement divisible par 5. Dès lors nous pouvons espérer que la considération de ce diviseur fournira quelques caractères d'impossibilité pour l'équation (1), dans le cas où A sera multiple de 5. Soit donc $A = 5^\mu a$, a désignant une puissance d'un nombre premier $6m - 1$. Le premier théorème (§ 1) nous apprend que, si l'équation

$$(1) \qquad x^3 + y^3 = 5^\mu a z^3$$

est possible en nombres entiers, le nombre z ne peut être impair sans être premier à 3; d'où l'on déduit aisément que z doit être pair.

En effet, si l'on suppose que z est impair et premier à 3, l'équation (1) conduit aux équations (2) et (6). Or l'équation

$$x + y = f(f^2 - 9g^2) + 9g(f^2 - g^2) = 5^\mu a u^3 = F + 3G$$

est évidemment impossible, puisque des deux nombres premiers entre eux, F, G, l'un est multiple de 5.

Soit donc z pair. Et d'abord supposons z premier à 3. La décomposition de l'équation (1) donnera les équations (2) et (4). Or l'équation

$$5^\mu a u^3 = 2f(f^2 - 9g^2),$$

dans laquelle $2f$, $f + 3g$, $f - 3g$ sont des nombres premiers entre eux, se décompose nécessairement de l'une des manières suivantes :

$$\begin{array}{lll}
5^\mu a \alpha^3 = 2f, & f + 3g = \beta^3, & f - 3g = \gamma^3, \\
5^\mu \alpha^3 = 2f, & f \pm 3g = a\beta^3, & f \mp 3g = \gamma^3, \\
a\alpha^3 = 2f, & f \pm 3g = 5^\mu \beta^3, & f \mp 3g = \gamma^3, \\
\alpha^3 = 2f, & f \pm 3g = 5^\mu a \beta^3, & f \mp 3g = \gamma^3, \\
\alpha^3 = 2f, & f \pm 3g = a\beta^3, & f \mp 3g = 5^\mu \gamma^3.
\end{array}$$

On en déduit respectivement les cinq équations :

$$\beta^3 + \gamma^3 = 5^\mu a \alpha^3, \quad 5^\mu \alpha^3 = a\beta^3 + \gamma^3, \quad a\alpha^3 = 5^\mu \beta^3 + \gamma^3,$$
$$\alpha^3 - \gamma^3 = 5^\mu a \beta^3, \quad \alpha^3 = a\beta^3 + 5^\mu \gamma^3.$$

La première et la quatrième doivent être rejetées, parce qu'elles donnent une solution de l'équation (1), dans laquelle les indéterminées sont égalées à trois diviseurs de la valeur *minima* de z, ce qui est absurde. Quant aux trois autres, elles se ramènent à l'équation unique

$$(C) \qquad a\alpha^3 + 5^\mu \beta^3 + \gamma^3 = 0,$$

dans laquelle on doit supposer $\alpha\beta\gamma$ premier à 3.

12. Soit z multiple de 3, et posons $z = 3uv$. L'équation (1) donnera les équations (2) et (5), dont l'une

$$\frac{x+y}{6} = \frac{5^\mu . 3au^3}{2} = 3g(f^2 - g^2)$$

donne

$$5^\mu a u^3 = 2g(f^2 - g^2).$$

En décomposant cette équation, comme nous avons fait pour l'équation analogue du numéro précédent, et en excluant les décompositions qui ramènent l'équation proposée vérifiée par des diviseurs de la valeur *minima* de z, on trouve que toutes les autres décompositions donnent une équation de la forme

$$(C) \qquad a\alpha^3 + 5^\mu \beta^3 + \gamma^3 = 0,$$

dans laquelle on peut supposer l'un des nombres α, β, γ divisible par 3. En rapprochant ce résultat du précédent, nous concluons que l'équation (1) est impossible pour la valeur $A = 5^\mu a$, si le nombre a désigne une puissance d'un nombre premier $6m - 1$, et qu'en même temps il rende impossible l'équation (C).

13. Soit $\mu = 1$, et réduisons l'équation (C) à une congruence suivant le module 9. En ayant toujours égard à la congruence $m^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$, si m est premier à 3, nous obtenons, suivant les différentes hypothèses possibles, l'une des quatre congruences

$$a \pm 5 \pm 1 \equiv 0, \quad 5 \pm 1 \equiv 0, \quad a \equiv \pm 1, \quad a \equiv \pm 5 \pmod{9}.$$

La seconde est impossible; les trois autres exigent que a soit de

l'une des formes

$$9m+(\pm 5, \pm 1, \pm 4, \pm 6).$$

Comme a est premier à 3, il faut exclure la dernière forme; la première et la troisième rentrent l'une dans l'autre, de telle sorte qu'il ne reste que les formes

$$9m+(1, 4, 5, 8),$$

ce qui exclut les deux formes $9m+(2, 7)$, et par suite les valeurs q et p^2 de a.

Théorème VIII. — *Aucun des nombres représentés par les formules $5q$, $5p^2$ n'est décomposable en une somme de deux cubes rationnels.*

14. Soit $\mu = 2$, et supposons $a = 18m+5$, c'est-à-dire $a = p$ ou $a = q^2$.

L'équation (C) devient

$$a\alpha^3 + 25\beta^3 + \gamma^3 = 0,$$

et se ramène, par rapport au module 9, à l'une des quatre congruences

$$5\pm 2\pm 1 \equiv 0,\quad \pm 2\pm 1\equiv 0,\quad \pm 2\pm 5\equiv 0,\quad \pm 5\pm 1\equiv 0 \pmod{9},$$

qui sont toutes impossibles. Donc :

Théorème IX. — *Aucun des nombres compris dans les deux formules $25p$, $25q^2$ n'est décomposable en une somme de deux cubes rationnels.*

Si nous avons égard à l'observation, faite dès l'introduction de ce Mémoire, que l'impossibilité de décomposer en deux cubes rationnels un nombre p^α entraîne la même impossibilité pour le nombre $p^{3m+\alpha}$, quel que soit d'ailleurs le nombre entier et positif m, nous pouvons réunir les résultats obtenus jusqu'ici dans le théorème général :

Théorème X. — *Si l'on désigne par p et q deux nombres premiers compris respectivement dans les formes linéaires* $18m+5$, $18m+11$,

et par m un nombre entier et positif quelconque, aucun des nombres compris dans les formules suivantes :

$$p^m,\quad q^m,\quad 2p^{3m+1},\quad 2q^{3m+2},\quad 4p^{3m+2},\quad 4q^{3m+1},$$
$$9p^{3m+1},\ 9q^{3m+1},\ 9p^{3m+2},\ 9q^{3m+2},\ 5p^{3m+2},\ 5q^{3m+1},\ 25p^{3m+1},\ 25q^{3m+2},$$

n'est décomposable en une somme de deux cubes rationnels.

Pour épargner un travail inutile à ceux qui voudraient faire des recherches sur le même sujet, j'ajouterai quelques observations.

1° On chercherait vainement à prouver l'impossibilité de décomposer en deux cubes rationnels les nombres premiers $(18m+17)$, ou les produits de ces nombres multipliés par une puissance de 2 ou de 3; car on a

$$17 = \left(\frac{18}{7}\right)^3 - \left(\frac{1}{7}\right)^3,$$
$$2\times 17 = \left(\frac{631}{182}\right)^3 - \left(\frac{359}{182}\right)^3,$$
$$4\times 17 = \left(\frac{2538163}{620505}\right)^3 - \left(\frac{472663}{620505}\right)^3,$$
$$3\times 17 = \left(\frac{730511}{197028}\right)^3 + \left(\frac{62641}{197028}\right)^3,$$
$$9\times 17 = \left(\frac{70}{13}\right)^3 - \left(\frac{19}{13}\right)^3.$$

2° On ne trouvera pas non plus de théorème du même genre pour les nombres premiers $6m+1$: tous ces nombres sont compris dans la forme quadratique

$$A^2 + 3B^2,$$

et il résulte des formules données par Lamé, dans son étude *Sur les binômes cubiques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXI, p. 924), que le nombre A^2+3B^2 est la somme de deux cubes rationnels, toutes les fois que l'un des trois nombres $2A$, $3B\pm A$ est un cube, ou que l'un des trois nombres $2B$, $A\pm B$ est le triple d'un cube.

3° On ne sera pas dans de meilleures conditions si l'on considère

le produit d'un nombre premier $6m+1$ par une puissance de 5; car si le nombre a est compris dans l'une des formules suivantes :

$$(4\times 5^{\mu}m^3)^2+3l^2,\quad l^2+3(12\times 5^{\mu}m^3)^2,$$
$$(5^{\mu}m^3\pm 3l)^2+3l^2,\quad (3\times 5^{\mu}m^3\pm l)^2+3l^2,$$

le produit $5^{\mu}a$ est décomposable en deux cubes rationnels.

4° Quant aux nombres composés, la probabilité de leur décomposition en deux cubes rationnels augmente avec le nombre des facteurs. Par une méthode différente de celle qui a été suivie dans ce Mémoire, on peut obtenir les deux théorèmes suivants :

Théorème XI. — *Le double d'un nombre triangulaire quelconque est toujours décomposable en deux cubes rationnels.*

Ainsi les doubles des nombres triangulaires compris dans la première centaine sont

$$2,\quad 6,\quad 12,\quad 20,\quad 30,\quad 42,\quad 56,\quad 72,\quad 90:$$

or on a

$$2=1^3+1^3,\qquad 6=\left(\frac{17}{21}\right)^3+\left(\frac{37}{21}\right)^3,\qquad 12=\left(\frac{19}{39}\right)^3+\left(\frac{89}{39}\right)^3,$$
$$20=\left(\frac{19}{7}\right)^3+\left(\frac{1}{7}\right)^3,\qquad 30=\left(\frac{107}{57}\right)^3+\left(\frac{163}{57}\right)^3,\qquad 42=\left(\frac{449}{129}\right)^3-\left(\frac{71}{129}\right)^3,$$
$$56=\left(\frac{73}{19}\right)^3-\left(\frac{17}{19}\right)^3,\qquad 72=(4)^3+(2)^3,\qquad 90=\left(\frac{1241}{273}\right)^3-\left(\frac{431}{273}\right)^3.$$

Ce théorème est lui-même compris dans un théorème plus général :

Théorème XII. — *Tout nombre composé de deux facteurs, dont la somme ou la différence est égale à un cube, est lui-même la somme de deux cubes rationnels.*

Par exemple, on a

$$8=1+7=2+6=3+5=4+4=10-2=11-3=12-4,\ldots$$

Or chacun des produits

$$1\times 7,\quad 2\times 6,\quad 3\times 5,\quad 16,\quad 20,\quad 33,\quad 48,\quad 65,\quad 84,\ldots$$

est décomposable en deux cubes rationnels. En omettant les décompositions évidentes et celles qui ont été données plus haut, on a

$$15=\left(\frac{683}{294}\right)^3+\left(\frac{397}{294}\right)^3,\quad 33=\left(\frac{1853}{582}\right)^3+\left(\frac{523}{582}\right)^3,$$
$$48=\left(\frac{74}{21}\right)^3+\left(\frac{34}{21}\right)^3,\quad 84=\left(\frac{433}{111}\right)^3+\left(\frac{323}{111}\right)^3,\ldots$$

De même on a

$$3^3=25+2=24+3=23+4=\ldots=29-2=30-3\ldots;$$

chacun des produits

$$25\times 2,\quad 24\times 3,\quad 23\times 4,\quad 22\times 5,\quad 21\times 6,\quad 20\times 7,$$
$$19\times 8,\quad 18\times 9,\quad 17\times 10,\ldots,\qquad 29\times 2,\quad 30\times 3,\ldots$$

est décomposable en deux cubes rationnels. On a

$$50=\left(\frac{23417}{6111}\right)^3-\left(\frac{11267}{6111}\right)^3,\quad 23\times 4=\left(\frac{25903}{5733}\right)^3-\left(\frac{3547}{5733}\right)^3,$$
$$22\times 5=\left(\frac{26693}{5571}\right)^3+\left(\frac{37}{5571}\right)^3,\quad 21\times 6=\left(\frac{27189}{5427}\right)^3+\left(\frac{3429}{5427}\right)^3,$$
$$20\times 7=\left(\frac{27397}{5301}\right)^3+\left(\frac{6623}{5301}\right)^3,\quad 19\times 8=\left(\frac{16}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3,$$
$$18\times 9=\left(\frac{17}{7}\right)^3+\left(\frac{37}{7}\right)^3,\quad 17\times 10=\left(\frac{26353}{5031}\right)^3+\left(\frac{14957}{5031}\right)^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$29\times 2=\left(\frac{28747}{9\times 787}\right)^3-\left(\frac{14653}{9\times 787}\right)^3,\quad 30\times 3=\left(\frac{1241}{273}\right)^3-\left(\frac{431}{273}\right)^3,\ldots$$

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Maurice Levy, *présenté le* 3 *juin* 1867, *reproduit le* 21 *juin* 1869 [*] *et intitulé :* Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées, et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement ; par MM. Combes, Serret, Bonnet, Phillips, de Saint-Venant rapporteur.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, séance du 7 février 1870.)

On connaît depuis longtemps la loi qu'observent les pressions dans les fluides pesants en équilibre.

On connaît aussi, depuis les mémorables travaux (1821 à 1829) de Navier, Cauchy, Poisson, Lamé et Clapeyron, les lois que suivent les pressions ou tractions dans les corps solides parfaitement élastiques, comme sont les métaux, etc., quand les déformations de leurs éléments restent fort petites.

Mais on n'a pas la même connaissance pour les forces du même genre qui se trouvent en jeu dans les masses solides inconsistantes, telles que la terre ou le sable. Aussi, pour calculer les poussées exercées par de pareilles masses sur les murs de soutènement qu'elles tendent à renverser, on considère seulement, avec Coulomb [**], ce qui s'y passerait lors d'un commencement de rupture de leur équilibre; et, comme lui, on a coutume de supposer qu'à cet instant une partie du massif se divise, *suivant des plans,* en zones ou couches qui glissent

[*] *Comptes rendus,* t. LXVIII, p. 1456.

[**] *Essai sur une application des règles* de maximis et minimis *à quelques problèmes de statique relatifs à l'agriculture* (*Savants étrangers,* 1773).

les unes contre les autres et produisent des frottements dont les intensités suivent la loi du rapport constant avec les composantes normales des poids. Et les inclinaisons des plans hypothétiques de séparation sont déterminées par la condition d'avoir un maximum, soit pour la poussée contre le mur, soit (ce qui ne revient pas toujours au même) pour le moment résultant de cette poussée par rapport à la ligne inférieure autour de laquelle le mur tend à se renverser [*]. On tient compte aussi du frottement des terres contre la maçonnerie, force que Prony et les autres premiers successeurs de Coulomb négligeaient, et que Poncelet a rétablie d'une manière simple et élégante [**].

Nous ne parlons pas de l'*adhésion* proportionnelle aux surfaces, que Coulomb faisait entrer aussi dans ses calculs, car les constructeurs regardent aujourd'hui comme prudent de ne pas en ajouter les effets à ceux des frottements; et, entre les plus expérimentés, M. le Maréchal Vaillant a très-bien fait voir [***], par des exemples concluants et nombreux, que les terres dont une certaine proportion d'argile rend les parties adhérentes entre elles exercent, lorsque l'eau vient à les imprégner et à les dilater, un genre de poussée qui compense, et au delà, la propriété qu'elles ont de se soutenir à pic d'elles-mêmes sur une certaine hauteur à l'état sec.

Aussi, nous commençons par dire que, dans le Mémoire de M. Levy dont nous avons à rendre compte, il n'est question que des terres sans cohérence, comme sont celles qui ont été fraîchement remuées.

La théorie citée de Coulomb a été développée dans ses conséquences, de 1804 à 1846, par de savants ingénieurs, bien que l'illustre physicien n'ait proposé qu'avec réserve et sans beaucoup de confiance son hypothèse de la séparation des massifs suivant des surfaces toujours planes.

Depuis, M. le docteur Hermann Scheffler, après avoir constaté le peu de valeur des raisons par lesquelles deux Géomètres ont essayé de

---

[*] Ainsi que l'a fait M. le capitaine du Génie Curie, dans un Mémoire présenté le 21 décembre 1868.

[**] *Mémorial du Génie*, n° 13, 1840.

[***] Rapport déposé le 15 septembre 1862 sur une tentative de théorie nouvelle de la poussée des terres, presentée en 1859.

justifier théoriquement la supposition de ce mode exclusif de rupture, a tenté, le premier, une détermination mieux fondée des forces dont ces massifs sont le siége, lorsque leur équilibre est infiniment peu troublé [*]. Bornant ses calculs au cas le plus simple, qui est celui d'un massif indéfini terminé en haut par une surface horizontale, M. Scheffler montre très-bien qu'à l'intérieur les faces verticales et les faces horizontales seules sont pressées normalement; puis, admettant à peu près *à priori* qu'en tout point, parmi les petites faces obliques, il s'en trouve au moins une sur laquelle la direction de la pression fait avec la normale à cette face un angle égal à celui de frottement de terre contre terre, il pose les équations de l'équilibre d'un élément prismatique à base trapèze; et, en invoquant, comme dans les autres parties de son livre, un certain principe, dit *de moindre résistance*, dont on lui a reproché l'obscurité et le défaut de généralité [**], le savant et ingénieux conseiller des travaux du Duché de Brunswick arrive à une détermination, qui peut être regardée comme juste, du rapport entre les pressions s'exerçant sur les faces verticales et sur les faces horizontales en chaque point; d'où il tire une solution exactement motivée, et du reste conforme, quant au résultat, à celle de Coulomb, du problème de la poussée sur un mur vertical, pour le seul cas où l'on suppose lisse ou sans frottement la face de ce mur.

M. Levy est allé bien plus loin dans cette voie rationnelle; car, tout en n'y marchant qu'appuyé sur des principes clairs et dégagés d'hypothèses non justifiées, il est parvenu à poser en équation, d'une manière générale, le problème des pressions intérieures d'un massif quelconque sur le point de se désagréger dans toutes ses parties, ou à l'état d'équilibre-limite, soutenu par un mur lisse ou rugueux, sur lequel il exerce une poussée d'une obliquité aussi quelconque; et il en a déduit des conséquences nombreuses et intéressantes au point de vue tant scientifique que pratique.

Son analyse se base en grande partie sur les théorèmes découverts par Cauchy, en 1823, et aujourd'hui généralement admis et employés,

[*] *Traité de la stabilité des constructions*, 1857; traduit en 1864, par M. V. Fournié.

[**] Article de M. Ch. Leblanc, aux *Annales des Ponts et Chaussées*, janvier et février 1867, p. 139.

qui résultent très-simplement de l'expression des conditions de l'équilibre de translation et de l'équilibre de rotation du tétraèdre et du parallélépipède élémentaire dans toute espèce de matière solide ou liquide, en repos ou en mouvement. Énonçons d'abord, et en langage ordinaire, ces trois importants théorèmes, qui, trop habituellement à notre avis, ne le sont qu'en un langage analytique faisant obstacle à leur diffusion et à leur enseignement, qui devrait être général :

1° La pression sur (ou à travers) une petite face à l'intérieur d'un corps est constamment résultante des pressions supportées par ses trois projections rectangulaires ou obliques sur trois plans quelconques passant par son centre.

2° Lorsque deux petites faces planes de même superficie ont leur centre au même point, la pression sur l'une, projetée sur une normale à l'autre, est égale à la pression sur la seconde, projetée sur une normale à la première.

Si, pour un point quelconque, l'on prend les dérivées, par rapport à ses trois coordonnées rectangles, des pressions supportées par l'unité superficielle de trois petites faces qui leur sont respectivement perpendiculaires, ces pressions étant décomposées suivant une même direction quelconque, la somme des trois dérivées est égale à la composante, dans cette même direction, de la force qui sollicite l'unité de volume de matière au point considéré [*].

---

[*] C'est-à-dire que, si l'on prend, par exemple, x pour la direction de décomposition, et si p_{xx}, p_{yx}, p_{zx} représentent les composantes des pressions sur l'unité superficielle des trois petites faces respectivement perpendiculaires aux x, aux y, aux z se coupant au point (x, y, z), l'on a

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = \mathrm{X},$$

X étant la force tant motrice que d'inertie animant l'unité de volume dans la direction x, et qui se réduit ordinairement, s'il y a équilibre, au poids de ce volume de matière, estimé suivant les x. Cette équation jointe à deux autres pareilles, où les sens de décomposition sont y et z, forment ce que Cauchy appelle *les relations entre les pressions et les forces accélératrices*. En les ajoutant, après les avoir multipliées respectivement par les cosinus des angles formés par les x, y, z avec une droite prise arbitrairement, on a l'expression analytique du théorème plus général énoncé, et qui est démontrable directement.

M. Levy exprime ce qui résulte du troisième théorème par deux équations différentielles à deux coordonnées, l'une horizontale, l'autre verticale, en abstrayant la troisième coordonnée, aussi horizontale, ainsi qu'on peut toujours le faire quand on ne s'occupe, avec tous les auteurs, que d'un massif et d'un mur prismatiques à arêtes horizontales, dont il n'est besoin de considérer que l'unité de longueur mesurée dans le sens de ces arêtes.

Les deux équations ainsi posées ne suffisent pas pour déterminer les deux composantes normales et la composante tangentielle de pression sur des faces perpendiculaires aux ordonnées : composantes dont dépendent, d'après le premier théorème, toutes les grandeurs et directions des pressions qui ont lieu sur les diverses autres faces. Pour avoir entre ces trois inconnues une troisième équation, l'auteur observe que, sur aucune face, la pression exercée ne saurait faire avec la normale à cette face un angle qui excède celui φ du frottement de terre contre terre; car évidemment, si cet angle avec la normale devenait plus grand, l'équilibre se romprait par glissement, comme quand un corps posé sur un plan solide se trouve sollicité, parallèlement à celui-ci, par une force qui excède le produit de la pression normale par le *coefficient* $\tang \varphi$ dit *du frottement*. Or, dans le cas de la question de stabilité ou d'équilibre-limite qui est ici à résoudre, on doit supposer *que, pour la face où cet angle de la pression avec la normale est plus grand que pour les autres petites faces se croisant au même point, il atteint justement le maximum énoncé,* ou cette valeur limite φ qu'il prendrait quand le massif commencerait à s'ébouler ou à se désagréger. Il est clair, en effet, que, si le poids d'un mur soutenant ce massif est tant soit peu supérieur à ce qu'il faut pour faire équilibre à des forces ainsi constituées, et si l'on opère un commencement de renversement en ajoutant pour peu de durée une petite force à celles qui le poussent, le renversement ne continuera pas lorsque cette force additionnelle et étrangère aura été soustraite ou aura cessé d'agir; d'où l'on peut parfaitement conclure que, si une pareille force n'est point ajoutée, le renversement ne commencera pas, et la stabilité du système est assurée.

Cette supposition d'une inclinaison constante de la pression sur l'une des faces intérieures qui se croisent en tous sens à chaque point

d'un massif peut être regardée comme la traduction vraie de la pensée première et intime de Coulomb; elle n'entraîne nullement l'admission de la partie arbitraire de son hypothèse de 1773, à savoir : cette tendance à rupture ou à glissement *suivant des surfaces constamment planes,* à laquelle il ne croyait pas lui-même avec assurance, et que M. Levy montrera plus loin ne pouvoir exister que sous des conditions particulières.

Elle avait déjà été faite par M. Scheffler; mais M. Levy la motive d'une manière nette, et il lui fait porter toutes ses conséquences; car, en la combinant avec les deux premiers théorèmes de Cauchy, ou avec ce qui résulte de l'équilibre d'éléments prismatiques à base triangulaire ou à base carrée, il établit une équation nouvelle et générale qui équivaut à ce remarquable théorème sur l'état d'équilibre-limite :

« Si l'on considère, dans le massif près de s'ébouler, deux petites faces intérieures quelconques de même superficie, perpendiculaires entre elles et parallèles à ses arêtes, le carré de la demi-somme des composantes normales des pressions qui s'y exercent, multiplié par le carré du sinus de l'angle φ du frottement de terre contre terre, est égal au carré de la demi-différence, plus le carré de la composante tangentielle de ces pressions dans un sens perpendiculaire à l'intersection des deux faces. »

Comme cette composante tangentielle est nulle sur les deux faces rectangulaires dites *de pressions principales* ou normales dont l'existence, en tous les points d'un corps quelconque est, comme on sait, une conséquence des mêmes théorèmes de Cauchy, on voit que, dans l'intérieur du même massif sur le point de se désagréger :

« Le quotient de la différence par la somme des deux pressions principales est constant et égal au sinus de l'angle de frottement; »

Ou que :

« Le rapport de la plus petite à la plus grande des deux pressions principales est égal au carré de la tangente de la moitié du complément de cet angle. »

M. Levy reconnaît aussi que, par cela seul qu'il y a une face où la pression fait avec sa normale l'angle φ du frottement, il y en a aussi partout une autre où elle fait l'angle $-\varphi$, c'est-à-dire un angle de

même grandeur compté en un sens opposé. Il y a donc deux systèmes de lignes sur lesquelles les terres glissent au premier instant d'une rupture d'équilibre. Une pareille dualité est de nécessité cinématique; on la recontre également dans la théorie des pièces solides élastiques.

En appelant, avec M. Lamé, *courbes isostatiques* celles qui sont formées par la suite des directions des éléments plans sur lesquels s'exercent les pressions principales [*], et qui ne sont pressées que normalement; et en nommant *courbes de glissement* celles qui sont formées par la suite des directions des éléments plans sur lesquelles la pression a le maximum d'obliquité, on fait avec leurs normales l'angle $\pm \varphi$ du frottement, M. Levy reconnaît encore que :

« Les deux courbes de glissement coupent chacune des deux courbes isostatiques suivant deux angles égaux, comptés de part et d'autre en sens opposés; l'angle fait avec l'une des deux courbes isostatiques est moitié du complément de l'angle du frottement; l'angle fait avec l'autre est complément de cette moitié. »

En sorte que :

« Les deux courbes de glissement se coupent partout suivant un angle qui est le complément de celui du frottement de terre contre terre;

» Et la pression sur une des deux faces de glissement est dirigée dans le plan de l'autre face. »

Il en résulte que, si l'on construit l'ellipse dont les axes, dirigés suivant les deux pressions principales, ou tangents aux deux courbes isostatiques, ont des longueurs proportionnelles aux racines carrées des intensités de ces pressions, les tangentes aux lignes de glissement des deux systèmes sont dirigées suivant les deux diamètres conjugués égaux de cette ellipse, ou suivant les diagonales du rectangle circonscrit ayant les axes pour médianes.

Après avoir ainsi donné des théorèmes conduisant à éclairer, par des images géométriques, cette matière nouvelle, l'auteur déduit, des trois

---

[*] On dirait sans doute plutôt « orthostatiques » si l'on était dans le cas de considérer (*voyez* plus loin) les lignes *d'égale pression*, auxquelles le premier nom conviendrait mieux.

équations trouvées entre les deux composantes normales et la composante tangentielle de pression sur les faces horizontales et verticales, une équation aux dérivées partielles où se trouve uniquement engagée une inconnue auxiliaire. Le problème des poussées de l'état d'équilibre-limite sera résolu d'une manière générale, si l'on intègre cette équation différentielle *indéfinie* ou applicable à tous les points du massif supposé ébouleux dans toutes ses parties, en ayant égard aux conditions *définies* ou à son contour, savoir :

1° Que les pressions soient nulles sur la surface supérieure (car il ne s'agit que des excès des pressions sur celle de l'atmosphère);

2° Que sur la face en contact avec un mur, et vu que celui-ci constitue un système se mouvant tout d'une pièce en cas d'éboulement, la pression forme partout, avec la normale à ce mur, un angle égal à celui du frottement de la terre contre la maçonnerie.

Mais comme cette équation aux dérivées partielles du second ordre est en même temps *du second degré*, on n'en connaît pas d'intégrale rigoureuse. En attendant qu'on apprenne tout au moins à y suppléer par des méthodes d'approximation, M. Levy traite une suite de cas particuliers *où le massif est limité à sa partie supérieure par un plan* d'une inclinaison quelconque, et où il peut résoudre complétement cette équation, ou plutôt directement et sans inconnue auxiliaire, les trois autres équations dont elle est déduite.

Il commence par considérer un massif ainsi terminé en haut et *indéfini dans les autres sens*, mais en supposant abstractivement qu'il y a comme ci-dessus, et en tous ses points, une face où la pression fait l'angle constant φ avec sa normale, quoique cela ne soit possible, dans un pareil massif sollicité seulement par son poids, que quand le plan supérieur fait ce même angle φ avec l'horizon. Cette sorte d'hypothèse provisoire revient à abstraire d'abord la deuxième des *conditions définies* ou au contour, celle qui est relative à la face en contact avec le mur, et à astreindre seulement les pressions inconnues à remplir la *première* de ces conditions, celle de leur nullité sur la surface supérieure.

Il trouve que :

1° Les lignes isostatiques, et par suite les lignes de glissement de chacun des deux systèmes, *sont toutes droites* et parallèles entre elles;

2° Les pressions s'exerçant aux divers points, sur des faces de même direction, sont proportionnelles aux distances de ces points au plan supérieur;

3° La verticale et la coupe du talus supérieur du massif sont deux diamètres conjugués de l'ellipse ci-dessus, dont les axes, ayant pour rapport mutuel la tangente du demi-complément de l'angle du frottement, ont leurs directions parallèles aux lignes isostatiques des deux systèmes.

Il en résulte un moyen géométrique de déterminer ces deux lignes, et, par suite, les lignes de glissement qui, de part et d'autre de l'une d'elles, font un angle égal à ce même demi-complément.

Mais ces lignes de glissement se déterminent plus promptement par un calcul trigonométrique simple; car, en cherchant l'angle dont le cosinus a pour grandeur le quotient du sinus de l'angle ω du talus supérieur avec l'horizon, par le sinus de l'angle φ du frottement, et en en retranchant l'excès $\varphi - \omega$ du second sur le premier, l'on obtient le double de l'angle ε que font, avec la verticale, les lignes de glissement de l'un des deux systèmes, celui qui coupe, sous le plus petit angle, la ligne montante du talus supérieur.

L'expression de cet angle ε serait, ainsi, imaginaire si l'on supposait l'inclinaison du talus supérieur sur l'horizon plus grande que l'angle du frottement de terre contre terre. Cela est d'accord avec ce qu'on admet généralement, à savoir que les terres ne se soutiennent que sous une inclinaison moindre, quand on néglige leur cohésion.

On déduit de là, aussi, des expressions des deux pressions principales, et, par suite, de toutes celles qui s'exercent sur les faces diversement inclinées.

Maintenant, si un côté du massif indéfini, que M. Levy a considéré ainsi abstractivement, est remplacé par un mur soutenant le reste, la répartition des forces intérieures, dans l'état considéré d'équilibre-limite ou de commencement de glissement, se trouve par cela seul changé en général; car la pression qui s'exerce contre le mur a une direction tout à fait déterminée faisant, avec la normale à la face pressée, *un angle égal à celui φ' du frottement de la terre contre la maçonnerie*.

Si la face du mur ainsi intervenu possède tout juste la direction

pour laquelle les deux composantes tangentielle et normale de pression, dans le massif indéfini d'abord supposé, ont pour rapport mutuel la tangente de cet angle φ', rien ne sera changé dans les intensités ni dans les directions des diverses forces en jeu; les lignes isostatiques continueront de former deux systèmes de droites parallèles; il en sera de même des lignes de glissement ou de tendance à rupture, et l'hypothèse de Coulomb se trouvera alors justifiée.

Mais il en sera autrement si la direction de la face postérieure du mur est différente de celle qui, pour un talus supérieur donné, remplit la condition que l'on vient d'énoncer. Les forces auront d'autres directions et intensités; les lignes de glissement, comme les lignes isostatiques, *seront courbes*, bien que la surface supérieure du massif soit toujours supposée être un plan horizontal ou incliné. A plus forte raison en sera-t-il ainsi, lorsque cette surface sera, ou courbe, ou polyédrique.

Généralement il convient d'attribuer au frottement des terres contre la maçonnerie le même coefficient qu'au frottement de terre contre terre, car on peut toujours rendre la maçonnerie assez rugueuse pour que le frottement qui s'y exerce atteigne cette grandeur, qu'on ne doit jamais supposer être dépassée, puisqu'une couche de terre resterait adhérente au mur; et c'est contre cette couche que s'exercerait le frottement du reste du massif.

Or, lorsqu'on fait égaux ces deux coefficients de frottement tang φ et tang φ' de terre contre terre et de terre contre le mur, il est clair que celui-ci, pour remplir la condition énoncée de ne rien changer aux forces en jeu dans le massif en cas d'éboulement, *doit avoir sa face postérieure dans la direction des lignes de glissement* d'un des deux systèmes, savoir : celui dont nous venons d'apprendre à calculer l'inclinaison ε sur la verticale.

On trouve immédiatement ainsi, si l'on adopte 45 degrés pour l'angle du frottement, ou l'unité pour son coefficient : que la face du mur doit faire avec la verticale un quart d'angle droit ($\varepsilon = 22^\circ \frac{1}{2}$) quand le terre-plein supérieur est horizontal; que quand celui-ci fait avec l'horizon 30 degrés, le mur en doit faire 15 avec la verticale; enfin la face du mur doit être verticale ($\varepsilon = 0$) quand le terre-plein est en talus de terre coulante ($\omega = 45^\circ$).

Alors (et quel que soit l'angle du frottement) M. Levy trouve par

l'analyse, et vérifie par un raisonnement simple et ingénieux, que la poussée sur l'unité superficielle d'un élément quelconque de la face du mur *est égale au poids d'un prisme de terre de même base et d'une hauteur égale à la profondeur de ce point, mesurée sur la même face, multiplié par le cosinus de la somme de l'angle* ε *de cette face avec la verticale et de l'angle* ω *du talus supérieur avec l'horizon.*

On ne saurait désirer une expression plus simple de la poussée oblique exercée en chaque point du mur; expression qu'il suffit de multiplier successivement par le cosinus et par le sinus de l'angle φ de frottement pour en avoir les composantes normale et tangentielle à la face du mur.

L'auteur compare ce résultat avec celui que donne la théorie de Coulomb.

On sait que, lorsque les terres s'élèvent, comme nous le supposons ici, en talus d'une inclinaison donnée quelconque derrière un mur de soutènement dont la face postérieure a une inclinaison aussi quelconque, et lorsqu'on tient compte du frottement sur cette face, le calcul fait par la théorie de Coulomb se présente avec une complication extrême. Un seul auteur, M. Saint-Guilhelm, en a dégagé, par un élégant artifice, l'expression de la poussée [*]. Or M. Levy démontre que cette expression compliquée se réduit à la formule très-simple dont nous venons de parler lorsque les inclinaisons ω et ε du talus supérieur et de la face du mur ont entre elles la relation

$$\cos(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi},$$

que nous avons dit être nécessaire pour que les faces de glissement soient planes.

On pouvait le présumer, car alors, mais seulement alors, l'hypothèse de Coulomb est légitime et ses formules sont exactes. Dans tout autre cas, sa théorie est réellement fautive. M. Levy le prouve d'une manière directe en montrant que, dans un massif qui commence à glisser, les

[*] *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. IX, 1844. *Voyez*, pour cette expression, la Note *Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée, etc.*, à la suite du présent Rapport.

lignes de glissement ne peuvent être droites *sans être en même temps parallèles entre elles* dans chacun de leurs deux systèmes; que cela ne saurait avoir lieu qu'autant que la surface supérieure du terrain est plane, et que, s'il y a un mur, son inclinaison se trouve avoir, avec celle de cette surface, la relation ci-dessus fixée [*].

Les formules de poussée que M. Levy a obtenues jusqu'à présent de sa théorie, et qui s'appliquent à la série des cas indiqués, donnent donc le même résultat que celles de la théorie de Coulomb appliquée aux mêmes cas. Mais il les obtient sous une forme excessivement simple, à laquelle on n'aurait jamais soupçonné que celles-ci pussent se réduire, ce qui déjà est un grand avantage. En outre, la théorie de Coulomb était impuissante à fournir les conditions de son exactitude, ou de la légitimité de la supposition de séparation suivant des surfaces planes, tandis que la théorie de M. Levy, exempte d'hypothèses de ce genre, spécifie nettement les cas où les formules tirées jusqu'ici de ses équations différentielles sont applicables exactement. Ces cas (en nombre infini) sont ceux de la pratique ou en sont généralement assez rapprochés, car on donne ordinairement, aux faces postérieures des murs, des inclinaisons sur la verticale comprises entre zéro et le demi-complément (soit $22°,5$) de l'angle du frottement des terres.

Et, dans des cas où le talus supérieur ne partirait pas du haut de cette face du mur, ainsi que dans ceux où les inclinaisons ω et ε du talus et de la face n'auraient pas entre elles la relation indiquée, il sera le plus souvent possible de faire des comparaisons ou assimilations à des cas où ces conditions sont remplies, de manière à tirer des formules nouvelles des résultats approchés.

Il y a plus : l'étude du travail de M. Levy nous a suggéré la re-

[*] Il prouve encore directement que si, dans un massif soutenu par un mur, on a des plans pour les surfaces sur lesquelles le rapport des composantes tangentielles aux composantes normales de pression est le plus grand possible, ces surfaces, sur lesquelles le glissement s'opérera au premier instant d'une rupture de l'équilibre, sont précisément celles qui détachent du massif les prismes exerçant sur le mur la poussée maximum ou la butée minimum, vu que la dérivée de cette force, par rapport à l'angle d'inclinaison de la face du prisme, doit nécessairement être nulle; en sorte qu'une des deux hypothèses de Coulumb, celle du maximum, est une conséquence mathématique de l'autre.

marque qu'on pourrait avec avantage, comme approximation, employer pour toutes les valeurs des deux angles en question (ω et ε) ses formules de poussée, établies en remplissant seulement les conditions définies relatives à la surface supérieure, formules qui ne sont, disons-nous, tout à fait exactes, ou ne remplissent en même temps la condition relative à la face du mur, que pour une relation déterminée entre ces deux mêmes angles d'inclinaison du terre-plein et du mur. En effet, employer ainsi les formules dont nous parlons revient simplement à supposer que le coefficient du frottement de la terre contre le mur a une valeur variable, mais restant toujours comprise entre zéro et sa valeur réelle. Or on sait, et il est du reste évident, que le frottement contre la maçonnerie diminue la tendance au renversement, en sorte que, si on lui suppose un coefficient plus faible que le coefficient effectif, le résultat du calcul sera une poussée plus grande que la poussée réelle, et, par suite, pour le mur, l'adoption de dimensions augmentant la stabilité. Les formules de la théorie nouvelle, dans ce cas où elles ne sont qu'approximatives, offriront donc, outre la simplicité, un avantage de sécurité que l'on n'est nullement certain d'obtenir par la théorie de Coulomb employée, dans les mêmes cas, aussi comme extension et approximation [*].

La théorie nouvelle, au point où elle a déjà été amenée, offre donc des avantages pratiques réels, outre l'établissement de formules et de théorèmes remarquables sur l'état particulier d'équilibre dont elle s'occupe.

On a vu d'ailleurs que son auteur a posé le problème en équation d'une manière générale; en sorte qu'on peut entrevoir pour l'avenir beaucoup d'autres résultats utiles.

Nous pensons donc qu'à tous égards le Mémoire de M. Levy est digne de la haute approbation de l'Académie, et nous en proposons l'insertion au *Recueil des Savants étrangers*.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

---

[*] *Voyez* encore la Note à la suite du Rapport.

Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, séance du 14 février 1870.)

1. Le Mémoire *Sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres* sans consistance, que l'Académie vient d'approuver, et dont l'auteur est M. l'ingénieur des Ponts et Chaussées Maurice Levy, donne, pour cet équilibre supposé près de se rompre, des équations générales, et des formules simples qui les résolvent exactement dans une série indéfinie de cas particuliers, où il y a une certaine relation entre l'inclinaison de la face postérieure du mur soutenant les terres, et l'inclinaison du plan que leur surface supérieure est supposée affecter à partir du haut de cette même face du mur.

Je me propose principalement, dans la présente Note, de montrer, plus explicitement qu'il n'a pu être fait à la fin du Rapport sur ce Mémoire, que les formules simples tirées jusqu'à présent de sa nouvelle théorie par l'auteur peuvent être employées comme approximation et avec sécurité dans tous les autres cas, c'est-à-dire lorsque la relation en question n'est point satisfaite, et qu'ainsi la face du mur et le talus d'en haut des terres sont des plans ayant des inclinaisons quelconques.

2. La propriété qu'ont les liquides pesants en repos d'avoir leur surface supérieure constamment perpendiculaire à la direction de la gravité suffit pour montrer que, dans l'état d'équilibre, leurs pressions, même intérieures, sont partout normales aux faces pressées, et pour

qu'on puisse évaluer exactement leurs intensités et leurs directions à toutes les profondeurs.

Pour les masses inconsistantes dites *demi-fluides*, telles que la terre sablonneuse, on n'a qu'une notion bien moins complete de ce qui se passe, car leur surface supérieure peut se tenir sous une inclinaison susceptible de grandeurs diverses; on sait seulement, et c'est là leur propriété caractéristique, que cette inclinaison sur l'horizon *ne dépasse jamais un certain angle*, qui, pour chaque espèce, est dit *de terre coulante*, ou *de frottement de terre contre terre.*

Or on peut tirer, de cela seul, des conditions pour cet état d'*équilibre-limite*, ou sur le point d'être rompu, qu'il faut toujours supposer dans un système lorsqu'on veut, comme dans la question qui nous occupe, établir les conditions de sa stabilité et calculer sa résistance.

3. Soit en effet

$$\varphi$$

l'angle en question, qui, ainsi, est le plus grand de ceux que la direction d'une pression intérieure puisse faire avec la normale à la face à travers laquelle elle agit; c'est-à-dire soit

$$\operatorname{tang}\varphi$$

le plus grand rapport de la composante tangentielle à la composante normale de la pression exercée sur cette face.

Et soient encore, si NMQ et ABMN (*fig.* 1) représentent les coupes transversales du massif considéré de terre sans cohésion et d'un mur qui le soutient, l'un et l'autre de forme prismatique à arêtes horizontales perpendiculaires au plan de coupe :

x et y les coordonnées Mq, qm tracées dans ce plan vertical, d'un de ses points, m;

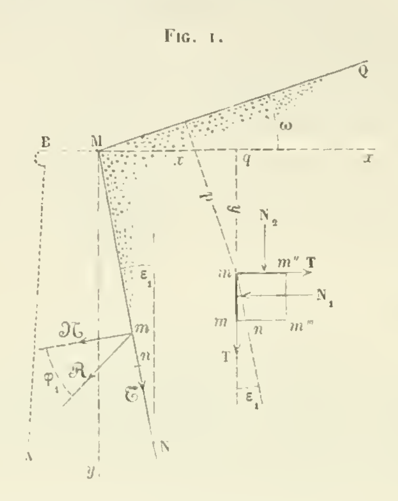
θ l'angle que nous supposerons d'abord fait avec la verticale par la coordonnée y;

N_1, N_2 les composantes *normales*, ou respectivement parallèles aux x, aux y, des pressions ou poussées que supportent, par unité superficielle, deux très-petites faces mm', mm''' passant par ce point, et perpendiculaires aux mêmes coordonnées;

T la composante *tangentielle* des deux mêmes pressions, perpendiculairement à l'intersection commune m des deux faces ; composante qui doit, comme on sait, être la même sur toutes deux pour satisfaire à l'équilibre de rotation d'un élément rectangle dont la coupe est $m m' m''' m''$;

Π le poids de l'unité de volume de la terre.

Fig. 1.



L'on a, entre N_1, N_2, T les trois équations

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT}{dy} = -\Pi\sin\theta, \tag{1}$$

$$\frac{dT}{dx} + \frac{dN_2}{dy} = \Pi\cos\theta, \tag{2}$$

$$4T^2 + (N_2 - N_1)^2 - (N_2 + N_1)^2\sin^2\varphi = 0, \tag{3}$$

dont les deux premières signifient simplement qu'il y a équilibre de translation du même élément rectangle dans les sens x et y, et dont la troisième, due à M. Levy, exprime que, parmi les petites faces obliques qui ont pour intersection commune l'arête m de l'élément, il y en a une ou deux où l'inclinaison de la pression sur sa normale atteint l'angle maximum φ : ce qui est la condition pour que le massif, ou au moins la partie du massif où est le point m, soit près de s'ébouler, ou se trouve dans l'état particulier d'équilibre que nous devons ici supposer.

Nous disons *ou la partie du massif*, parce que rien ne nous dit encore qu'il n'y ait pas quelques autres parties qui, lors de la chute du mur, resteraient immobiles, et d'autres qui se mouvraient en bloc à la manière des solides cohérents, ou sans les glissements relatifs intérieurs qui constituent l'état ébouleux.

De plus si, *mn* étant une quelconque de ces petites faces obliques intérieures qui se coupent suivant l'arête *m*, l'on appelle, pour cette face, et de même pour une petite portion *mn* de celle MN du mur :

ε_1 l'angle qu'elle fait avec les y;

$\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ les composantes normale et tangentielle de la pression sur cette même petite face par unité superficielle;

φ_1 l'angle aigu de cette pression avec la normale à la face;

φ' l'angle du frottement qu'exerceront les terres sur la maçonnerie du mur en glissant sur elle s'il y a éboulement, ou l'inclinaison-limite, sur la normale au mur, de la pression ou poussée de la terre contre le mur;

Il résulte de l'équilibre de translation du tétraèdre élémentaire de Cauchy, remplacé ici par un élément prismatique à base triangulaire *mm'n*, qu'on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{N} &= \frac{N_2+N_1}{2} - \frac{N_2-N_1}{2}\cos 2\varepsilon_1 - T\sin 2\varepsilon_1,\\ \mathfrak{T} &= -\frac{N_2-N_1}{2}\sin 2\varepsilon_1 + T\cos 2\varepsilon_1,\\ \operatorname{tang}\varphi_1 &= \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}\,[^*]. \end{aligned}\right.$$

---

[*] C'est même de la troisième de ces équations, écrite ainsi :

$$(4\ bis)\qquad 2T\cos(\varphi_1 - 2\varepsilon_1) + (N_2 - N_1)\sin(\varphi_1 - 2\varepsilon_1) = (N_2 + N_1)\sin\varphi_1,$$

que M. Levy déduit celle (3); car, en la différentiant par rapport à ε_1, et faisant $\frac{d\varphi_1}{d\varepsilon_1} = 0$, il tire pour la tangente, et par suite pour le cosinus et le sinus de $\varphi_1 - 2\varepsilon_1$, répondant au maximum de φ_1, des valeurs qui, substituées dans (4 *bis*), donnent pour le sinus de ce plus grand angle φ_1 d'inclinaison de la pression sur la normale à la face, une expression où l'on n'a qu'à remplacer φ_1 par φ pour avoir la condition (3) de l'équilibre-limite en *m*.

Il faut donc, pour le *juste équilibre* supposé, outre les équations (1), (2), (3), *indéfinies* ou applicables aux divers points m du massif, qu'on ait la condition suivante *définie* ou particulière à quelques points :

$$(5) \qquad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = \operatorname{tang}\varphi', \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi_1 = \varphi' \quad \text{à ceux qui touchent le mur;}$$

et, encore, les deux qui suivent, si l'on suppose que la partie *ébouleuse,* ou qui ne se meut qu'en se désagrégeant, doive s'étendre jusqu'en haut :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} N_2 = 0, \quad T = 0 \quad [\text{entraînant, vu (3),} \quad N_1 = 0] \\ \text{aux points de la surface supérieure MQ [*].} \end{array} \right.$$

La solution, si elle est possible, des équations (1), (2), (3) sous les conditions (5) sur la partie MN du contour et (6) sur la partie MQ, fournira, après substitution dans les expressions (4), la solution complète du problème de *la poussée des terres contre le mur*, dont on doit déterminer les dimensions et le mode de fondation de manière à y résister.

M. Levy, prenant les coordonnées x, y horizontale et verticale, ou $\theta = 0$, ramène les équations indéfinies (1), (2), (3), qu'il faut résoudre, à une seule, en posant, au moyen d'une inconnue auxiliaire ψ,

$$(7) \qquad N_1 = \frac{d^2\psi}{dy^2}, \quad N_2 = \Pi y + \frac{d^2\psi}{dx^2}, \quad T = -\frac{d^2\psi}{dx\,dy},$$

ce qui satisfait à (1) et à (2), et donne, par substitution dans (3), une équation en ψ aux dérivées partielles du second ordre.

Comme cette équation est aussi *du second degré,* on ne peut guère espérer en trouver l'intégrale générale et exacte.

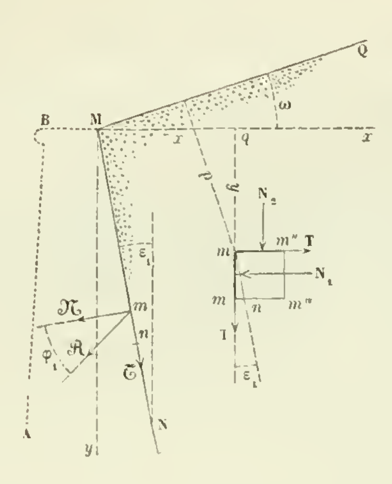
4. Mais elle s'intègre d'elle-même, ou plutôt on résout directement et exactement les équations indéfinies (1), (2), (3) dont elle provient,

---

[*] On n'a pas besoin de tenir compte de la pression de l'atmosphère si N_1, N_2, $\mathfrak{N}$ ne représentent que les excès, sur celle-ci, des pressions normales effectives.

de manière à satisfaire aux conditions définies (5), et aussi (6), en justifiant complétement celles-ci, dans un cas fort étendu, où le massif est terminé en haut par un plan passant par l'arête postérieure M du mur.

Fig. 2.



Soient, en effet (*fig.* 2) :

ω l'angle que fait ce plan supérieur avec l'horizon,

p la perpendiculaire qui y est abaissée par le point m.

Si, pour un instant, nous prenons les coordonnées x, y parallèles et perpendiculaires à ce même plan, on

$$(8) \qquad p = y, \quad \vartheta = \omega,$$

et si nous désignons par des accents les composantes de pression qui s'y rapportent, nous satisferons à (1), (2), ainsi qu'à (6), par les deux premières des expressions suivantes, dont la troisième, fournie en tirant N_1 de celle (3), satisfait également aux autres :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} N'_2 = \Pi p \cos\omega, \quad T' = -\Pi p \sin\omega, \\ N'_1 = \Pi p \left(\dfrac{2\sigma}{\cos\varphi} - \cos\omega \right) \quad \text{en faisant} \quad \sigma = \dfrac{\cos\omega}{\cos\varphi} - \sqrt{\dfrac{\cos^2\omega}{\cos^2\varphi} - 1} \text{ [*]}. \end{array} \right.$$

[*] Si le massif était un corps élastique uni et indéfini, on aurait toujours pour N'_2 et T' les deux premières expressions (9); mais, au lieu de la troisième, il faudrait

D'où l'on déduit facilement, par les formules (4) de changement de face pressée, en y faisant $\varepsilon_1 = -\omega$ et $\varepsilon_1 = -\frac{\pi}{2} + \omega$, les pressions qui suivent, relatives à $\theta = 0$, ou à des coordonnées horizontales et verticales,

$$(10)\quad N_1 = \Pi p \sigma^2 \cos\omega, \quad N_2 = \Pi p \frac{1+\sigma^2 \sin^2\omega}{\cos\omega}, \quad T = -\Pi p \sigma^2 \sin\omega.$$

5. Or ces expressions (10), établies par M. Levy de manière à satisfaire d'abord aux conditions (6) relatives à la surface supérieure, résoudront évidemment le problème d'une manière complète si les données ω et ε_1 sont telles que ces expressions satisfassent aussi à la condition (5) relative à la face du mur [*], c'est-à-dire si les angles ω et ε_1 ont entre eux la relation qui résulte de la substitution, dans $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{N}} = \operatorname{tang}\varphi'$, des expressions (4) de $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$, où l'on aura mis celles (10) pour N_1, N_2, T. Cette relation est

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathcal{T}}{\mathcal{N}} = \operatorname{tang}\varphi_1, \\ \text{en faisant} \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi', \quad \text{et} \\ \mathcal{T} = \dfrac{-\Pi p}{2\cos\omega}\left[\sin 2\varepsilon_1 + \sigma^2 \sin(2\omega - 2\varepsilon_1)\right], \\ \mathcal{N} = \dfrac{\Pi p}{2\cos\omega}\left[2\sin^2\varepsilon_1 + 2\sigma^2\cos^2(\omega - \varepsilon_1)\right]. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

---

prendre $N'_1 = KN'_2 = K\Pi p \cos\omega$, K étant un certain nombre fractionnaire indépendant de ω, et auquel le calcul des forces moléculaires attribue la valeur $\frac{1}{3}$. Tout serait déterminé sans considérer spécialement l'état d'équilibre près de se rompre. Mais, en déduisant de là les pressions sur d'autres faces, on aperçoit facilement que cette assimilation à un corps unique, d'un amas de petits corps solides juxtaposés, conduirait à des pressions négatives ou *tractions* et à d'autres conséquences qui ne sauraient convenir au massif incohérent ainsi composé.

[*] Nous ne parlons pas du cas d'un massif indéfini en deux sens, ou sans mur qui le soutienne; car il n'est à l'état d'équilibre-limite et les expressions (10) ne lui sont applicables que si l'on a

$$\omega = \varphi,$$

ou si la face supérieure a le talus de terre coulante. Pour toute valeur de $\omega > \varphi$, l'équilibre ne saurait avoir lieu même quand il y a un mur, et N'_1 devient imaginaire. Et, pour toute valeur de $\omega < \varphi$, le rapport $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{N}}$ n'atteint sa limite $\operatorname{tang}\varphi$ nulle part.

Elle devient fort simple et d'un calcul facile lorsque l'on prend, comme il convient toujours de le faire,

$$(12) \qquad \varphi' = \varphi;$$

car, alors, elle se réduit, comme l'a trouvé M. Levy, à

$$(13) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon, \\ \varepsilon \text{ étant tiré de } \cos(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \dfrac{\sin\omega}{\sin\varphi}. \end{cases}$$

Dans ce cas fort étendu, ou cette suite de cas, où la surface supérieure est plane et où la valeur de ε_1 est celle que l'on tire en ω de (11) ou de (13), l'on a des *plans* pour les *surfaces de glissement des deux systèmes*, formés par la double suite des petites faces sur lesquelles la pression fait, avec leur normale, l'angle φ et l'angle $-\varphi$; surfaces dont les premières sont parallèles au mur si $\varphi' = \varphi$.

Aussi alors, mais seulement alors, la théorie de Coulomb, fondée sur l'hypothèse de cette séparation des massifs par surfaces toujours planes, donne des formules s'accordant avec la théorie nouvelle. Mais celle-ci apprend qu'elles se simplifient considérablement; car en appelant en général :

$\mathcal{R}$ la poussée résultante $= \dfrac{\mathfrak{N}}{\cos\varphi_1} = -\dfrac{\mathfrak{T}}{\sin\varphi_1}$ par unité superficielle de l'élément du mur en m,

L la profondeur $Mm = \dfrac{p}{\cos(\omega - \varepsilon_1)}$ du point m, mesurée sur la face même du mur,

M. Levy a reconnu analytiquement, et vérifié géométriquement, qu'on a

$$(14) \qquad \mathcal{R} = \Pi L \cos(\varphi + \varepsilon).$$

On doit remarquer aussi que toutes ces formules, établies pour une étendue indéfinie des plans MQ de la terre et MN du mur, seraient également applicables si le massif n'était qu'un coin ou prisme triangulaire contenu inférieurement entre deux murs dont les faces, pour lesquelles on suppose $\varphi' = \varphi$, et se rencontrant suivant leur arête d'en bas, seraient dirigées suivant des plans de glissement appartenant à chacun des deux systèmes dont on vient de parler. Les mêmes for-

mules sont, par conséquent, applicables aussi pour un seul mur de longueur finie MN, et pour un massif limité, pourvu que le plan supérieur de celui-ci, d'inclinaison constante ω, s'étende assez loin pour être rencontré par le plan de glissement du deuxième système partant de l'arête inférieure N; et toute la terre au-dessous de ce plan, en restant immobile, fera l'effet du deuxième mur.

6. Maintenant que fera-t-on, faute de pouvoir intégrer l'équation différentielle en ψ, lorsque, le talus supérieur ω étant donné, l'inclinaison ε_1, aussi donnée, de la face du mur, ne sera pas égale à ε tiré de (13), c'est-à-dire lorsque les angles ω et ε_1 n'auront pas entre eux la relation nécessaire pour que les expressions (10) satisfassent exactement à la condition qui fixe l'inclinaison de la pression du massif sur la face du mur dans l'état d'équilibre-limite?

Faudra-t-il, pour obtenir toujours une approximation, revenir à la théorie de 1773, bien qu'on sache qu'alors les surfaces de glissement, ou de tendance à rupture, ne sont pas planes comme Coulomb le supposait faute de mieux?

L'étude de la théorie nouvelle m'a convaincu qu'elle offrait pour cela un expédient plus facile et plus sûr.

Il consiste à se servir des expressions (10) de N_1, N_2, T et de celles (11) de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ qu'on en déduit par substitution, comme si elles étaient exactes quel que soit l'angle ε_1 du mur qui soutient le massif.

Cela, en effet, revient simplement à supposer que l'angle du frottement sur la face du mur, au lieu d'être φ, *est l'angle toujours moindre* $\varphi_1 = \text{arc tang}\,\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ qui résulte de ces expressions (11) de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$.

Or (ainsi qu'il a été observé au Rapport), le frottement des terres contre les murs les rend plus stables et diminue leur chance d'être renversés ou poussés en avant. En supposant ce frottement, non pas nul, sans doute (comme font encore quelques ingénieurs par une prudence exagérée), mais *moindre qu'il n'est effectivement*, cela conduira simplement à adopter, pour les murs, des dimensions un peu plus fortes qu'il n'est nécessaire. L'emploi que je propose ici des valeurs (11) de T et N, comme approximation dans les cas où la solution rigoureuse ne peut être obtenue, est donc favorable à la stabilité et à la sécurité.

Rien ne prouve qu'il en soit de même des formules déduites de la théorie de Coulomb : on n'a aucune raison de conjecturer qu'elles donnent des résultats au-dessus plutôt qu'au-dessous de la réalité. Elles sont moins sûres.

Or, M. Levy, à qui j'ai parlé de ce moyen de tirer de sa théorie un parti plus étendu, a aussitôt cherché à simplifier et à rendre calculables par logarithmes les expressions (13) de T et N. Il y est heureusement parvenu, et m'a communiqué les résultats suivants, non mentionnés à son Mémoire :

$$(15)\quad \begin{cases} \sin(2\alpha+\omega)=\dfrac{\sin\omega}{\sin\varphi} & \text{(pour calculer un angle auxiliaire } \alpha\text{)},\\ \operatorname{tang}(\varphi_1+\varepsilon_1+\alpha)=\dfrac{\operatorname{tang}(\varepsilon_1+\alpha)}{\operatorname{tang}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)} & \text{(pour déterminer l'angle } \varphi_1\text{)},\\ \mathfrak{T}=\dfrac{\Pi p\sin\varphi}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)}\,\dfrac{\cos\alpha\sin(2\alpha+2\varepsilon_1)}{\cos(\alpha+\omega)}, & \\ \mathfrak{N}=\dfrac{\mathfrak{T}}{\operatorname{tang}\varphi_1}. & \end{cases}$$

C'est de ces formules (où α représente l'angle fait avec l'horizon par l'une des deux directions rectangulaires de *pressions principales*, normales aux faces pressées), qui se réduisent à ce que donne (14) quand $\varepsilon_1=\varepsilon=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}-\alpha$, que l'on pourra tirer la valeur [quand elle ne sera pas exacte ou conforme à (14)] au moins approximative des poussées exercées sur un mur d'inclinaison quelconque ε_1 avec la verticale, par un massif de terre s'élevant derrière le haut du mur sous un angle ω fait avec l'horizon. Elles sont plus simples, en même temps que plus sûres, disons-nous, que celles qui résultent de la théorie de Coulomb [*].

[*] Celle-ci fournit, par une analyse compliquée dont M. l'ingénieur en chef Saint-Guilhem est parvenu à dégager la valeur de la poussée résultante $\mathcal{R}$, φ' étant l'angle quelconque du frottement contre la maçonnerie :

$$(16)\quad \frac{\mathfrak{N}}{\cos\varphi'}=\frac{\pm\mathfrak{T}}{\sin\varphi'}=\Pi L\frac{\cos^2(\omega-\varepsilon_1)\cos(\varphi'+\varepsilon_1)}{\cos^2(\varphi+\varphi'+\varepsilon_1-\omega)}\left[1-\sqrt{\frac{\sin(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\omega)}{\cos(\omega-\varepsilon_1)\cos(\varphi'+\varepsilon_1)}}\right]^2:$$

et si l'on veut avoir la valeur de l'angle V déterminant l'inclinaison, sur la verticale,

7. On peut se demander, en partant des formules (10) et (11) regardées comme donnant une première approximation, s'il y a possibilité de s'élever analytiquement à une approximation plus grande.

---

de la ligne de rupture ou de glissement, ce qui est utile quand la forme du profil est un peu différente de celle que la formule (16) suppose, il faut la tirer de l'expression suivante, où le radical est le même que dans celle-ci :

$$(17)\qquad \cot(V+\varphi) = -\frac{(1+\sqrt{})\cot(\varphi+\varepsilon_1)}{1+\cot(\varphi'+\varepsilon_1)\cot(\varphi+\omega)\sqrt{}}.$$

L'expression (16) donne, pour la composante normale $\mathfrak{N}$ qui tend au renversement, des valeurs un peu plus faibles, et, pour la composante $\mathfrak{T}$ qui tend à la stabilité, des valeurs sensiblement plus fortes que les formules (15) de la théorie nouvelle, comme on peut le voir par le tableau suivant, qui suppose $\varphi' = \varphi = 45°$.

Pour	$\omega =$	0°	10°	20°	30°	40°	45° = φ
Pour $\varepsilon_1 = 0°$	$\varphi_1 =$	0	10	20	30	40	45
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Levy.....	0,1716	0,1738	0,1818	0,2010	0,2608	0,5000
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Coulomb.	0,1361	0,1374	0,1547	0,1836	0,2547	0,5000
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Levy.....	0	0,0306	0,0662	0,1160	0,2188	0,5000
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Coulomb.	0,1361	0,1374	0,1547	0,1836	0,2547	0,5000
Pour $\varepsilon_1 = 10°$	$\varphi_1 =$	35°46′58″	39°14′24″	41°54′20″	43°56′48″	44°59′56″	42°25′37″
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Levy.....	0,1936	0,2126	0,2408	0,2894	0,4109	0,8123
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Coulomb.	0,1832	0,2068	0,2378	0,2886	0,4109	0,8272
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Levy.....	0,1395	0,1736	0,2161	0,2790	0,3833	0,7424
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Coulomb.	0,1832	0,2068	0,2378	0,2886	0,4109	0,8272
Pour $\varepsilon_1 = 15°$	$\varphi_1 =$	42°22′ 4″	43°45′19″	44°38′25″	45° 0′ 0″	44°12′23″	39°53′46″
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Levy.....	0,2193	0,2477	0,2876	0,3536	0,5111	1,0006
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Coulomb.	0,2172	0,2468	0,2874	0,3536	0,5125	1,0607
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Levy.....	0,1395	0,2371	0,2840	0,3536	0,4972	0,8365
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Coulomb	0,2172	0,2468	0,2874	0,3536	0,5125	1,0607
Pour $\varepsilon_1 = 20°$,	$\varphi_1 =$	44°45′40″	44°59′40″	44°52′27″	44°15′30″	42°20′36″	36°53′41″

Ce tableau comparatif ne donne les poussées que pour $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 10°$ et $\varepsilon_1 = 15°$. Mais on voit, par les valeurs de l'angle $\varphi_1 = \text{arc tang}\,\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ qui sont relatées, que

Égalons, pour cela, N_1, N_2, T à leurs expressions (10) augmentées respectivement de trois inconnues nouvelles, n_1, n_2, t supposées assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés et produits, et remplaçons-les, après substitution dans (1), (2), (3), par les trois dérivées secondes

$$\frac{d^2\psi'}{dy^2}, \quad \frac{d^2\psi'}{dx^2}, \quad -\frac{d^2\psi'}{dx\,dy},$$

multipliées par Π, d'une inconnue auxiliaire unique ψ'. Les deux premières équations seront satisfaites, et la troisième se changera en une équation aux dérivées partielles du second ordre *linéaire*, dont l'intégrale générale est facile à poser, soit sous forme finie, soit en série transcendante transformable en intégrale double prise de zéro à l'infini comme dans la formule de Fourier. Mais les fonctions arbitraires, ou les coefficients et paramètres, seraient à déterminer de manière à satisfaire aux conditions définies (5) et (6) relatives aux deux parties, de longueur infinie en un seul sens, MN, MQ du contour discontinu du massif; ou bien (conformément à l'observation de la fin du n° 5) aux conditions (6) à la surface MQ réduite à une longueur limitée, et à deux conditions telles que (5) relatives l'une au mur se terminant en N, l'autre à un plan de terre NQ fermant le triangle de base du massif ébouleux.

8. Une pareille détermination nous mènerait trop loin pour aujourd'hui, et paraît d'ailleurs affectée de difficultés d'un genre nouveau.

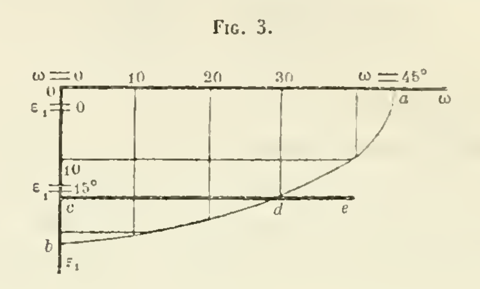
Aussi, en me bornant à exprimer le vœu que quelqu'un l'entreprenne, ou fasse dans le même but quelque tentative meilleure, je terminerai par une remarque propre à donner quelque idée d'approximation que les formules pratiques (15), établies par M. Levy à ma demande, sont susceptibles de donner.

---

quand ε_1 atteint 20 degrés, cet angle φ_1 du frottement fictif de la terre contre la maçonnerie, pour des talus ω de 0 à 40 degrés, se rapproche tellement de l'angle du frottement réel, supposé ici 45 degrés, qu'il est inutile alors de comparer les résultats de la formule Coulomb et de la formule Levy pour achever de se convaincre que celle-ci donne une suffisante approximation avec une sécurité plus grande.

Imaginons que l'on construise deux surfaces ayant des abscisses horizontales proportionnelles aux angles ω du talus supérieur des terres et aux angles ε d'inclinaison de la face du mur destiné à les soutenir [ces abscisses étant portées sur deux axes rectangulaires

Fig. 3.



horizontaux $O\omega$, $O\varepsilon$ (*fig.* 3)]; et des ordonnées verticales $\mathfrak{N}$ qui soient : 1° pour l'une des surfaces, ce que fournirait une détermination exacte des poussées normales inconnues, qui s'exercent par unité superficielle sur un élément déterminé de cette face de mur; 2° pour l'autre surface, les valeurs plus ou moins approchées que donnent de ces mêmes poussées normales $\mathfrak{N}$ les formules (15).

Ces deux surfaces de poussées normales vraies et approchées se couperont ou se toucheront suivant une courbe à double courbure ayant pour projection, sur le plan $\omega O \varepsilon_1$ des abscisses, la courbe plane *adb*, dont l'équation en ω et ε_1 est (13), ou, pour $\varphi = 45°$,

$$\cos(2\varepsilon_1 - \omega + 45) = \frac{\sin\omega}{\sin 45};$$

car lorsque les angles ω et ε_1 ont entre eux cette relation, nous avons vu que les solutions données par les formules (15) étaient exactes.

La même chose serait dite de deux surfaces dont les ordonnées verticales seraient les $\mathfrak{T}$ au lieu des $\mathfrak{N}$.

Or, la ligne *cde* représente, sur la même figure, jusqu'à un talus ω tenu un peu au-dessous de sa limite, l'ensemble des projections horizontales des points de ces surfaces qui répondent à $\varepsilon_1 = 15°$, c'est-à-dire à un *fruit* :

$$\tang \varepsilon_1 = 0{,}2679,$$

ou d'environ le quart de la hauteur, qui est celui que l'on donne le plus ordinairement à la face postérieure des murs de soutènement (généralement par gradins avec terre comblant leurs redans). Le peu d'éloignement où sont les points de cette droite *cde* de ceux de la courbe *adb* montre que les formules (15) donneront habituellement des résultats $\mathfrak{N}$ ou $\mathfrak{C}$ suffisamment approchés des résultats exacts.

Le plus grand écart, ou la plus grande différence, entre les ordonnées, soit $\mathfrak{N}$, soit $\mathfrak{C}$, des deux surfaces, aura lieu pour les points qui se projettent sur l'origine O, c'est-à-dire pour les valeurs

$$\omega = 0, \quad \varepsilon_1 = 0,$$

relatives à un terre-plein horizontal et à une face de mur verticale. Or l'adoption, dans ce cas extrême, des formules (15) revient à supposer (comme l'a fait Prony, qui a considéré ce seul cas) que le mur est lisse ou sans frottement. L'erreur est favorable à la stabilité. Elle est d'ailleurs moindre, quand ε_1 n'est point nul, que celle de la formule de Français, qui négligeait encore alors le frottement sur la face du mur, tandis que nous attribuons à son coefficient la valeur que fournit pour $\tang\varphi_1$ la deuxième expression (15), valeur qui, comme on voit par le tableau ci-dessus, *se rapproche beaucoup de sa vraie valeur*, supposée $= \tang 45^\circ = 1$ pour peu que ε_1 s'élève à 10 degrés, et y est sensiblement égale de $\omega = 0$ à $\omega = 40^\circ$ quand $\varepsilon_1 = 15^\circ$.

Les formules (15) de poussée contre un mur soutenant une terre en talus, plus faciles à calculer et surtout offrant une sécurité plus grande que celles (16) qui résultent de la théorie de Coulomb, me paraissent donc mériter la préférence dans les cas où il n'y a pas, entre les inclinaisons ω et ε_1 du terre-plein et du mur, la relation (11) ou (13) qui rend tout à fait exacts les résultats fournis par les deux théories alors concordantes.

Note sur les quadricuspidales;

Par M. DE LA GOURNERIE.

Le remarquable Mémoire que M. Laguerre a publié dans le *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XV, p. 193, a rappelé mon attention sur les quadricuspidales. Je connais relativement à ces surfaces plusieurs propositions dont la théorie peut être facilement rattachée au mode de génération que M. Laguerre fait connaître au n° 19 de son travail.

1. Considérons sur une surface du second ordre S une courbe du quatrième ordre (première espèce) K; à un point α de K passent deux génératrices de S qui rencontrent de nouveau cette courbe, l'une en β, l'autre en γ; lorsque le point α parcourt K, la droite $\beta\gamma$ engendre une quadricuspidale.

Chaque quadricuspidale ayant K pour ligne nodale peut être engendrée de cette manière à l'aide de l'une quelconque de quatre surfaces S. Les surfaces du second ordre qui passent par une même courbe du quatrième ordre forment donc, sous ce rapport, une involution du quatrième ordre. Les surfaces doubles de cette involution appartiennent deux à deux à trois groupes, et par suite l'involution est du genre de celles que j'ai étudiées dans l'introduction de mon Mémoire sur les lignes spiriques [*]. De là découlent diverses propositions auxquelles je ne m'arrêterai pas.

2. On peut facilement étendre aux polygones gauches formés sur

[*] *Journal de Mathématiques*, 1869.

une surface du second ordre par des génératrices rectilignes et inscrits dans une courbe du quatrième ordre le beau théorème donné par M. Poncelet sur les polygones inscrits dans une conique et circonscrits à une autre. Il suffit de prendre sur un plan la projection de la surface et celle de la courbe, le centre de projection étant placé au sommet de l'un des quatre cônes du second ordre qui sont circonscrits à cette ligne. En ne considérant que des quadrilatères, je dirai : A un point α d'une courbe du quatrième ordre K tracée sur une surface du second ordre S passent deux génératrices qui rencontrent de nouveau la courbe, l'une en β, l'autre en γ; de ces derniers points partent deux autres génératrices qui se coupent en un point α'. Si ce point est sur la courbe K, il y restera quelle que soit la position que le point α occupe sur elle. La quadricuspidale lieu des droites $\beta\gamma$ se réduit alors à une surface du quatrième ordre dont j'ai fait connaître les principales propriétés, et que j'ai appelée *quadricuspidale-limite* [*].

Cette circonstance se présente pour toute surface donnée comme double dans l'involution du quatrième ordre dont j'ai parlé. Ainsi par la courbe K passent six surfaces du second ordre, qui deux à deux déterminent une même quadricuspidale-limite par le mode de génération que j'ai indiqué n° 1. On trouve de cette manière les trois quadricuspidales-limites qui, comme je l'ai établi ailleurs, passent par une courbe du quatrième ordre.

Les deux couples de surfaces du second ordre qui déterminent deux quadricuspidales-limites, passant par une même courbe du quatrième ordre, forment un faisceau harmonique.

3. On peut étudier les quadricuspidales auxquelles donnent naissance les courbes du quatrième ordre tracées sur une surface du second ordre et correspondant aux diverses valeurs d'un paramètre variable. On trouve, par exemple, que six des lignes de courbure d'une surface du second ordre sont circonscrites à des quadrilatères gauches

[*] *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*, premier Mémoire, p. 61 et 114.

formés par des segments de génératrices. Ces lignes sont réparties en trois couples. Chaque axe de la surface forme une directrice rectiligne pour les deux quadricuspidales qui correspondent à un même couple.

Je crois inutile d'entrer dans plus de détails sur ces questions.

Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, séance du 4 avril 1870.)

Dans une Note des 7 et 14 février, mise à la suite du Rapport approbatif du remarquable Mémoire de M. Levy sur une *Théorie rationnelle de l'équilibre des terres*, M. de Saint-Venant a proposé d'employer comme approximation, pour le cas où l'inclinaison ε_1 du mur de soutènement est quelconque, des formules que la nouvelle théorie donne comme exactes dans le cas où cette inclinaison sur la verticale a une valeur particulière appelée ε; il y exprime aussi le vœu que quelqu'un entreprenne de s'élever de là à une approximation plus grande, en ajoutant, par exemple, aux valeurs approchées des inconnues N_1, N_2, T du problème, trois inconnues auxiliaires très-petites, qui auront leurs carrés et leurs produits négligeables quand ε_1 différera peu de ε, et que les équations (1) et (2) de M. Levy, rapportées à la Note citée, obligent de prendre respectivement de la forme

$$\Pi \frac{d^2\psi'}{dy^2}, \quad \Pi \frac{d^2\psi'}{dx^2}, \quad -\Pi \frac{d^2\psi'}{dx\,dy}.$$

Je me propose de répondre à cet appel et d'intégrer le système suivant d'équations :

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} &(1+\sigma^2)\sin^2\varphi\left(\frac{d^2\psi'}{dx^2}+\frac{d^2\psi'}{dy^2}\right) \\ &\quad -(1-\sigma^2\cos 2\omega)\left(\frac{d^2\psi'}{dx^2}-\frac{d^2\psi'}{dy^2}\right) - 2\sigma^2\sin 2\omega\,\frac{d^2\psi'}{dx\,dy} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(b)\quad \begin{cases} (\text{pour}\quad x>0\quad \text{et}\quad -y=x\,\text{tang}\,\omega), \\ \dfrac{d^2\psi'}{dx^2}=0, \quad \dfrac{d^2\psi'}{dx\,dy}=0, \quad \text{d'où aussi}\quad \dfrac{d^2\psi'}{dy^2}=0, \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} (\text{pour}\quad y>0\quad \text{et}\quad x=\text{tang}\,\varepsilon_1), \\ \left(\dfrac{d^2\psi'}{dx^2}+\dfrac{d^2\psi'}{dy^2}\right)\sin\varphi-\left(\dfrac{d^2\psi'}{dx^2}-\dfrac{d^2\psi'}{dy^2}\right)\sin(2\varepsilon_1+\varphi)-2\dfrac{d^2\psi'}{dx\,dy}\cos(2\varepsilon_1+\varphi) \\ \quad =\dfrac{2\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos\omega\cos\varepsilon_1}\left[\sin\varepsilon_1\cos(\varphi+\varepsilon_1)-\sigma^2\cos(\omega-\varepsilon_1)\sin(\varepsilon_1+\varphi-\omega)\right]y; \end{cases}$$

φ est un angle positif, inférieur à 90 degrés ou $\frac{\pi}{2}$; ω un autre angle compris entre $-\varphi$ et φ; σ la racine positive, inférieure à l'unité, de l'équation

$$(d)\qquad \frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}=\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\omega}}.$$

1. L'intégrale générale de (a) est de la forme

$$(e)\qquad \psi'=f(x-y\,\text{tang}\,\varepsilon')+f_1(x-y\,\text{tang}\,\varepsilon''),$$

où f et f_1 sont deux fonctions arbitraires, et ε', ε'' les deux racines de l'équation en ε qui résulte de la substitution dans (a), à ψ', de l'expression $f(x-y\,\text{tang}\,\varepsilon)$. Si l'on tire de cette équation σ^2, puis le quotient de $1-\sigma^2$ par $1+\sigma^2$, et qu'on l'égale au second membre de (d), il vient

$$(f)\qquad \cos(2\varepsilon-\omega)\sqrt{\cos^2\omega-\cos^2\varphi}=\sin^2\varphi+\sin\omega\sin(2\varepsilon-\omega),$$

relation qui donne successivement, en l'élevant d'abord au carré et résolvant par rapport à $\sin(2\varepsilon-\omega)$:

$$(g)\quad \begin{cases} \sin\varphi\sin(2\varepsilon-\omega)=-\sin\omega\sin\varphi\pm\cos\varphi\sqrt{\cos^2\omega-\cos^2\varphi}, \\ \sin\varphi\cos(2\varepsilon-\omega)=\pm\sin\omega\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{\cos^2\omega-\cos^2\varphi}; \end{cases}$$

$$(h)\quad \text{d'où}\quad \cos(2\varepsilon-\omega\pm\varphi)=\pm\frac{\sin\omega}{\sin\varphi},\quad \sin(2\varepsilon-\omega\pm\varphi)=\pm\frac{\sqrt{\cos^2\omega-\cos^2\varphi}}{\sin\varphi}.$$

Les angles ε', ε'', qu'on ne cherche qu'en vue de leurs tangentes, peuvent être pris entre -90 et 90 degrés. D'après cela, si nous appe-

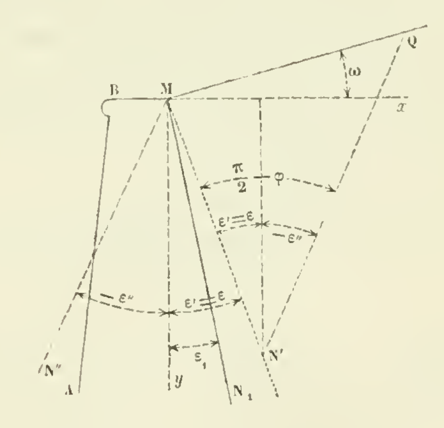
lons β l'angle positif et inférieur à π ou 180 degrés qui a pour cosinus le rapport de $\sin\omega$ à $\sin\varphi$, et si nous observons que $\varphi - \omega$ est > 0 et $< 2\varphi$, les équations (h) donneront

$$(h\ bis) \qquad \varepsilon' = \frac{\beta - (\varphi - \omega)}{2}, \quad \varepsilon'' = \varepsilon' - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

En faisant varier ω et exprimant en fonction de ω et φ les dérivées correspondantes de ε', ε'', on trouve aisément que ε', ε'' décroissent quand ω grandit. Concevons menées, à partir de l'origine M, les trois droites MQ, MN', MN'', qui font respectivement, la première avec l'axe des x et les deux autres avec celui des y, les angles ω, ε', ε'', et qui ont pour équations, ainsi que leurs prolongements,

$$y + x \operatorname{tang}\omega = 0, \quad x - y \operatorname{tang}\varepsilon' = 0, \quad x - y \operatorname{tang}\varepsilon'' = 0;$$

pendant que MQ tournera autour de l'origine, en faisant avec l'axe des y un angle $90° + \omega$ croissant de $90° - \varphi$ à $90° + \varphi$, la droite MN', d'abord en coïncidence avec MQ, tournera en sens inverse, précédée de l'autre droite MN'', qui sera constamment inclinée sur elle d'un angle complément de φ, et dont le prolongement finira par se confondre avec MQ pour $\omega = \varphi$.



2. Il suit de là que MQ est constamment dans l'angle formé par MN' et par le prolongement de MN'', et que les deux expressions $x - y \operatorname{tang}\varepsilon'$, $x - y \operatorname{tang}\varepsilon''$ sont positives aux divers points de MQ et y varient de

zéro à l'infini. Or, à cause de l'inégalité de $\tang \varepsilon'$ et de $\tang \varepsilon''$, les relations (b) obligent de poser séparément, en tous ces points, $f'' = 0$, $f''_1 = 0$. Par suite, *les dérivées secondes de* ψ' *sont nulles dans toute la partie du massif comprise entre* MQ *et* MN'.

3. Il reste à satisfaire à la condition (c). Si d'abord la face MN_1 du mur de soutènement se confond avec MN', ou que ε_1 prenne la valeur particulière ε', appelée ε par M. Levy, cette relation est vérifiée en y faisant $\psi' = 0$. Or je me suis proposé d'examiner les cas voisins de celui-là, c'est-à-dire ceux où l'angle ε_1 est égal à ε' diminué d'une petite quantité, ζ, positive ou négative.

Si d'abord ζ est < 0, le mur MN_1 sera dans l'angle QMN', et, les dérivées secondes de ψ' étant nulles dans tout le massif, la relation (c) ne pourra pas être vérifiée : *le problème n'admet pas alors de solution.*

Si au contraire ζ est > 0, ou si $\varepsilon_1 < \varepsilon$, la dérivée f''_1 sera encore nulle dans tout le massif; mais f'' pourra ne pas l'être dans l'angle $\mathrm{N}_1\mathrm{MN}'$ compris entre MN' et le mur; et, en déterminant sa valeur de manière à vérifier l'équation (c), l'on voit d'abord que cette fonction f'' sera du premier degré par rapport à sa variable, parce que le second membre de (c) est linéaire en y. Si on la désigne en conséquence par $\mathrm{A}(x - y \tang \varepsilon')$, et si, après avoir remplacé, dans les crochets du second membre de (c), les produits de sinus ou cosinus par des sommes d'autres sinus, on traite cette équation (c) comme j'ai traité l'équation (a), c'est-à-dire en y mettant cette valeur pour f'' qui entre dans les trois dérivées de ψ', puis tirant σ^2 et en portant son expression dans (d), il viendra exactement

$$(i) \qquad \mathrm{A} = \frac{2 \sin\varphi \cos^3\varepsilon' \cos(\omega - \varepsilon_1)}{\cos(\varphi + \varepsilon_1 - \varepsilon')\left(\cos\omega + \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}\right)},$$

avec

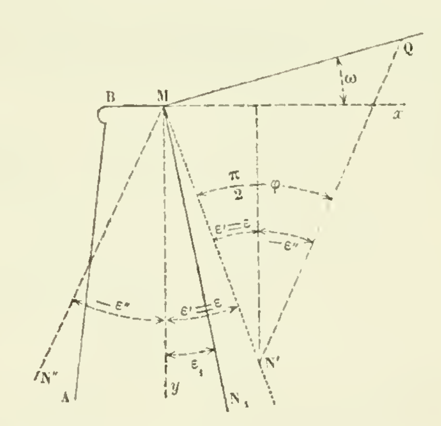
$$(j) \quad \psi' = f(x - y \tang \varepsilon'), \quad f'' = \begin{cases} 0, & \text{pour } x - y \tang \varepsilon' > 0, \\ \mathrm{A}(x - y \tang \varepsilon'), & \text{pour } x - y \tang \varepsilon' < 0. \end{cases}$$

Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée, contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome LXX, séance du 4 avril 1870.)

On trouve, au *Compte rendu* de ce jour [*], un article de M. Boussinesq contenant le résultat d'une intégration d'équation linéaire aux différences partielles du second ordre, faite pour certaines conditions définies d'un genre nouveau, afin de répondre à un appel que j'ai cru utile d'adresser aux lecteurs du même Recueil dans une Note du



7-14 février [**]. Mon but était, en provoquant ainsi leurs recherches, d'étendre beaucoup l'application de la théorie rationnelle de l'équi-

[*] *Voir* la Note précédente.

[**] T. LXX, p. 229 et surtout 285.

libre-limite ainsi que de la poussée des masses de terre, due à l'heureuse initiative de M. l'ingénieur Levy, qui, dans un Mémoire approuvé par l'Académie [*], a donné pour le problème général de cet équilibre une équation aux différences partielles du second ordre non linéaire, intégrable exactement dans les seuls cas d'un massif N_1MQ terminé en haut par un plan MQ dont l'inclinaison ω sur l'horizontale Mx ait une relation déterminée avec celle ε_1, sur la verticale My, de la face MN_1 du mur $ABMN_1$ destiné à soutenir ce massif d'une terre dont φ, plus grand que ω, est l'angle de talus naturel ou de terre coulante.

Je conseillais, pour les cas où cette relation [(b') ci-dessous] n'a pas lieu, d'employer toujours, comme approximation, des formules fournies par la théorie nouvelle; mais de rechercher une approximation plus grande au moyen de l'addition d'inconnues auxiliaires dont on négligerait les termes du second degré; ce qui revient à substituer dans l'équation de condition d'équilibre-limite de M. Levy [(3) du 7 février]

$$4T^2 + (N_2 - N_1)^2 - (N_2 + N_1)^2 \sin^2\varphi = 0,$$

aux composantes normales N_1, N_2 et à la composante tangentielle T de pression sur l'unité superficielle de faces intérieures perpendiculaires aux x et aux y, les expressions

$$(a')\quad \left\{\begin{aligned} &N_1 = \Pi\left(p\sigma^2\cos\omega + \frac{d^2\psi'}{dy^2}\right),\quad N_2 = \Pi\left(p\,\frac{1-\sigma^2\sin^2\omega}{\cos\omega} + \frac{d^2\psi'}{dx^2}\right),\\ &T = -\,\Pi\left(p\sigma^2\sin\omega + \frac{d^2\psi'}{dx\,dy}\right);\\ &\text{où}\quad p = x\sin\omega + y\cos\omega,\quad \sigma = \frac{\cos\omega}{\cos\varphi} - \sqrt{\frac{\cos^2\omega}{\cos^2\varphi} - 1}, \end{aligned}\right.$$

et à effacer les carrés et produits des trois dérivées secondes de l'inconnue ψ', ce qui fournit l'équation du second ordre linéaire (a) de la Note de M. Boussinesq; équation dont il vient de donner la solution de manière à remplir les conditions imposées, qui sont que ces

[*] T. LXX, p. 217, 7 février 1870.

trois dérivées s'annulent aux points de MQ et que, sur ceux de MN_1, on ait $-\tang\varphi$ pour le rapport de la composante tangentielle $\mathfrak{T}$ à la composante normale $\mathfrak{N}$ de la pression sur cette face du mur.

Voici ce qui résulte de l'analyse du savant professeur, ainsi que de la discussion aussi rigoureuse que délicate à laquelle il s'est livré et qui permet de s'en tenir à l'intégrale sous forme finie sans recourir aux formules transcendantes de fonctions discontinues :

1° L'on a $\psi' = 0$ quand l'angle $\varepsilon_1 = y\,MN_1$ de la face MN_1 du mur est justement égal à $\varepsilon = y\,MN'$ supposé satisfaire à

$$(b')\quad \cos(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi},\quad \text{d'où}\quad \sin(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}}{\sin\varphi};$$

ce qu'on savait déjà, car les expressions (a') sans les termes en ψ' donnent, alors, d'après le Mémoire de M. Levy et la Note du 7-14 février, la solution rigoureuse du problème. Ce sont elles, aussi, qui fournissent ce que la même Note présente comme une *première approximation* de la solution quand la condition $\varepsilon_1 = \varepsilon$ n'est point remplie.

2° Lorsque $\varepsilon_1 > \varepsilon$, c'est-à-dire lorsque la face postérieure MN_1 du mur tombe à droite de MN' ou est comprise dans l'angle QMN', le problème de la détermination de ψ', dont dépend la *seconde approximation* cherchée, *n'a pas de solution,* en sorte que, quelque petit que soit l'excès de ε_1 sur ε, les composantes de pression N_1, N_2, T ne sont pas susceptibles d'être représentées par des expressions telles que (a') : ce qui prouverait qu'alors le massif, quand l'équilibre serait dans le cas de se rompre par un commencement de renversement du mur, ne se désagrégerait pas à la fois dans toutes ses parties, ou que quelque portion vers le haut se mouvrait d'abord en bloc. Alors on est obligé de s'en tenir aux expressions (a') sans les termes en ψ', c'est-à-dire à la première approximation (*voir* la Note du 14 février).

3° Lorsque $\varepsilon_1 < \varepsilon$, c'est-à-dire que, comme sur la figure, la face MN_1 du mur fait avec la verticale My un angle moindre que celui $\varepsilon = y\,NM'$ que détermine la relation (b') entre ε et ω, l'intégration donne

$$(c')\qquad \psi' = f(x - y\tang\varepsilon) + f_1\left[x - y\tang\left(\varphi + \varepsilon - \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

f et f_1 étant deux fonctions dont la seconde, f_1, a sa dérivée seconde f''_1

nulle pour tous les points du massif, en sorte que, quelque valeur que du reste on lui attribue, elle ne donne rien dans les trois dérivées secondes de ψ' figurant aux expressions (a') des inconnues; et dont la première, f, est telle, qu'on ait pour sa dérivée du second ordre

$$(d')\quad f'' = \begin{cases} 0 \text{ pour } x - y\,\text{tang}\,\varepsilon > 0, & \text{c'est-à-dire pour les points situés dans l'angle } N'MQ; \\ A(x - y\,\text{tang}\,\varepsilon) \text{ pour } x - y\,\text{tang}\,\varepsilon < 0, & \text{c'est-à-dire pour les points situés dans le petit angle } N'MN_1; \end{cases}$$

où A est déterminé par l'expression

$$(e')\quad A = \frac{2\sin\varphi\cos^3\varepsilon\cos(\omega - \varepsilon_1)}{\cos(\varphi - \varepsilon + \varepsilon_1)\left(\cos\omega + \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}\right)} = 2\sigma\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\frac{\cos^3\varepsilon\cos(\omega - \varepsilon_1)}{\cos(\varphi - \varepsilon + \varepsilon_1)}\ [*].$$

---

[*] M. Boussinesq est arrivé aux expressions (b'), ou (h) de sa Note, en tirant σ^2 de l'équation

$$\cos 2\varepsilon - \sin^2\varphi = \sigma^2[\cos 2(\varepsilon - \omega) + \sin^2\varphi]$$

qui vient de la substitution de $f(x - y\,\text{tang}\,\varepsilon)$ à ψ' dans l'équation différentielle indéfinie (a), et en en déduisant le rapport $\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}$ qu'il faut égaler à $\frac{1}{\cos\omega}\sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}$; ce qui donne d'abord $\cos(2\varepsilon - \omega)$, d'où $\sin(2\varepsilon - \omega)$, et, par suite, $\cos(2\varepsilon + \varphi - \omega)$.

C'est par un artifice semblable qu'on évite d'interminables calculs, lorsqu'on traite l'équation de condition définie (c) de sa Note, relative aux points du mur. En substituant, aux trois dérivées secondes de ψ', respectivement f'', $\text{tang}^2\varepsilon\, f''$, $-\text{tang}\,\varepsilon\, f''$, avec

$$f'' = A(x - y\,\text{tang}\,\varepsilon) = -A\frac{\sin(\varepsilon - \varepsilon_1)}{\cos\varepsilon\cos\varepsilon_1}y,$$

on a d'abord

$$-A\frac{\cos(\varphi - \varepsilon + \varepsilon_1)\cos\omega\sin^2(\varepsilon - \varepsilon_1)}{\cos^3\varepsilon\cos(\omega - \varepsilon_1)} = \sin\varepsilon\cos(\varphi + \varepsilon_1) - \sigma^2\cos(\omega - \varepsilon_1)\sin(\varphi - \omega + \varepsilon_1),$$

d'où l'on tire, pour $\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2} = \frac{1}{\cos\omega}\sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}$, une expression qui se simplifie en remplaçant le cosinus et le sinus de $2\varepsilon_1 + \varphi - \omega$ par ceux de la différence de $2\varepsilon + \varphi - \omega$ et $\varepsilon - \varepsilon_1$; car ceux de $2\varepsilon + \varphi - \omega$ sont connus par (b'). D'où l'on dé-

Et, aux points du massif de terre qui occupe cette petite partie $N'MN_1$, l'on a

$$(f')\quad \begin{cases} N_1 = \Pi\left[p\sigma^2\cos\omega - A(y\,\text{tang}\,\varepsilon - x)\,\text{tang}^2\varepsilon\right],\\ N_2 = \Pi\left[p\,\dfrac{1+\sigma^2\sin^2\omega}{\cos\omega} - A(y\,\text{tang}\,\varepsilon - x)\right],\\ T\ = -\Pi\left[p\sigma^2\sin\omega + A(y\,\text{tang}\,\varepsilon - x)\,\text{tang}\,\varepsilon\right]; \end{cases}$$

c'est-à-dire les mêmes expressions de N_1, N_2, T dont nous venons de parler, pour même distance normale p à la ligne de talus supérieur, moins trois quantités proportionnelles aux distances horizontales $y\,\text{tang}\,\varepsilon - x$ de ces mêmes points à la ligne MN', dont l'angle avec la verticale est ε déterminé par (b').

On a les composantes N_1, N_2, T relatives aux points de la face MN_1 du mur, en y faisant $x = y\,\text{tang}\,\varepsilon_1$, d'où, en appelant

$$(g')\qquad L = \frac{\cos\varepsilon_1}{\varphi}$$

la profondeur MN_1, mesurée sur le mur, à laquelle est placé un point N_1 de sa face, ce qui donne

$$(h')\quad \begin{cases} y\,\text{tang}\,\varepsilon - x = \dfrac{L\sin(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos\varepsilon},\\ p = x\sin\omega + y\cos\omega = L\cos(\omega-\varepsilon_1), \end{cases}$$

---

duit, sans avoir besoin de négliger aucun terme de l'ordre de $\varepsilon - \varepsilon_1$ ou de son carré, l'expression (c') de la constante A.

C'est encore en dégageant le rapport de $1-\sigma^2$ à $1+\sigma^2$ et en faisant des réductions, à un seul terme, de sommes et de différences de sinus, que l'on démontre simplement les mêmes relations (b') envisagées comme condition que le rapport de $-\mathfrak{T}$ à $\mathfrak{N}$ soit $\text{tang}\,\varphi$, ou que MN' soit une *face de glissement;* et, aussi, qu'on arrive facilement à prouver que la pression résultante $\mathfrak{R}$ sur cette face est exprimée par $\Pi p\sigma$; et puis que $\sigma = \dfrac{\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos(\omega-\varepsilon)}$, ce qui fournit l'expression (14) $\mathfrak{R} = \Pi L\cos(\varphi+\varepsilon)$ de la Note du 7 février, obtenue d'abord par M. Levy, à la suite d'une longue analyse.

Les calculs seraient encore plus simples, en prenant, comme on fait d'abord à la Note du 7 février, des coordonnées x', y' respectivement parallèles et perpendiculaires au talus supérieur MQ.

l'on obtient

$$(i')\quad\begin{cases}\dfrac{N_2+N_1}{2}=\dfrac{\Pi L}{2}\left[\dfrac{1+\sigma^2}{\cos\omega}\cos(\omega-\varepsilon_1)-\dfrac{A\sin(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos^3\varepsilon}\right],\\ \dfrac{N_2-N_1}{2}=\dfrac{\Pi L}{2}\left[\dfrac{1-\sigma^2\cos 2\omega}{\cos\omega}\cos(\omega-\varepsilon_1)-\dfrac{A\sin(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos^2\varepsilon}\cos 2\varepsilon\right],\\ T=-\dfrac{\Pi L}{2}\left[\dfrac{\sigma^2\sin 2\omega}{\cos\omega}\cos(\omega-\varepsilon_1)+\dfrac{A\sin(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos^2\varepsilon}\sin 2\varepsilon\right].\end{cases}$$

Substituant dans les formules de changement de plan de pression [(4) du 7 février]

$$\mathfrak{N}=\frac{N_2+N_1}{2}-\frac{N_2-N_1}{2}\cos 2\varepsilon_1-T\sin 2\varepsilon_1,$$

$$\mathfrak{T}=-\frac{N_2-N_1}{2}\sin 2\varepsilon_1+T\cos 2\varepsilon_1,$$

on a, pour la composante normale et pour la composante tangentielle, que nous appellerons respectivement $\mathfrak{N}''$ et $\mathfrak{T}''$, de la poussée exercée au point N_1 sur l'unité superficielle de la face MN_1 du mur, en mettant pour A sa valeur (e') :

$$(j')\quad\begin{cases}\mathfrak{N}''=\dfrac{\Pi L}{2}\left\{\dfrac{\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos\omega}\left[2\sin^2\varepsilon_1+2\sigma^2\cos^2(\omega-\varepsilon_1)\right]\right.\\ \qquad\qquad\left.-4\sigma\dfrac{\sin\varphi\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos\varphi\cos(\varphi-\varepsilon+\varepsilon_1)}\sin^3(\varepsilon-\varepsilon_1)\right\},\\ \mathfrak{T}''=-\dfrac{\Pi L}{2}\left\{\dfrac{\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos\omega}\left[\sin 2\varepsilon_1+\sigma^2\sin 2(\omega-\varepsilon_1)\right]\right.\\ \qquad\qquad\left.+4\sigma\dfrac{\sin\varphi\cos(\omega-\varepsilon_1)\cos(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos\varphi\cos(\varphi-\varepsilon+\varepsilon_1)}\sin^2(\varepsilon-\varepsilon_1)\right\}\ [*].\end{cases}$$

---

[*] Par un calcul encore fondé sur

$$\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}=\frac{1}{\cos\omega}\sqrt{\cos^2\omega-\cos^2\varphi}=\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}(2\varepsilon+\varphi-\omega)$$

et sur

$$\sigma=\cos\varphi\frac{1+\sigma^2}{2\cos\omega},$$

on peut vérifier que le rapport de ces deux expressions (j') de $\mathfrak{T}''$ et $\mathfrak{N}''$ se réduit à $-\operatorname{tang}\varphi$.

Si l'on ne conserve que les premières parties de (j') entre accolades, on a les expressions (11) de la Note du 7-14 février, avec ε_1 non égal à ε, c'est-à-dire *les formules de première approximation*, dont les valeurs se calculent plus facilement et par logarithmes au moyen de celles (15) que M. Levy a ultérieurement établies, et qui ont fourni les chiffres du tableau que cette même Note contient.

Les secondes parties entre accolades donnent respectivement ce qu'il faut retrancher de la composante normale et ajouter à la valeur absolue de la composante tangentielle pour avoir la *deuxième approximation*.

On voit que cette diminution à $\mathfrak{N}$ et cette augmentation à $-\mathfrak{T}$ sont respectivement de l'ordre du cube et de l'ordre du carré du sinus de l'angle $\varepsilon-\varepsilon_1 = \mathrm{N'MN_1}$.

Ce sont des corrections négligeables si cet angle est très-petit, et même (comme je m'en suis assuré), s'il va jusqu'à 7 degrés pour $\mathfrak{T}$, et jusqu'à 12 degrés pour $\mathfrak{N}$ dans l'hypothèse $\varphi = 45$ degrés. Les deux surfaces courbes considérées au n° 9 de la même Note, dont les ordonnées respectives sont les poussées réelles et les poussées de première approximation, doivent, ainsi, se toucher et non se couper suivant la courbe dont la projection sur le plan des abscisses ω et ε_1 est la courbe plane *adb* de la figure qu'on y a tracée.

Comme les suppressions de carrés et de produits des dérivées de ψ', qui ont rendu linéaire l'équation différentielle indéfinie

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}&(1+\sigma^2)\sin^2\varphi\left(\frac{d^2\psi'}{dx^2}+\frac{d^2\psi'}{dy^2}\right)\\&\qquad-(1-\sigma^2\cos 2\omega)\left(\frac{d^2\psi'}{dx^2}-\frac{d^2\psi'}{dy^2}\right)-2\sigma^2\sin 2\omega\,\frac{d^2\psi'}{dx\,dy}=0\end{aligned}\right.$$

de la Note de M. Boussinesq, sont fondées sur la supposition que ε_1 diffère fort peu de ε tiré de (13) ou de

$$(b')\qquad \cos(2\varepsilon+\varphi-\omega)=\frac{\sin\varphi}{\sin\omega},$$

il est entendu que les formules (j') ne sont point applicables lorsque la différence entre ces deux angles est grande, lorsque, par exemple, elle s'élève à 10 degrés pour la première et à 15 degrés pour la se-

conde, surtout quand ω est peu considérable : rien ne dit alors qu'elles donnent des valeurs plus approchées des composantes $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ de la poussée que celles de première approximation, ou qu'elles soient plus exactes avec les seconds termes entre accolades qu'en se tenant aux premiers seuls.

Par exemple, dans le cas le plus examiné par Coulomb et par Prony, où le terre-plein est horizontal, c'est-à-dire où

$$(k')\quad \begin{cases} \omega = 0, \quad \text{d'où} \quad \sigma = \dfrac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} = \operatorname{tang}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right), \\ \varepsilon = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}, \quad \cos^2\varepsilon = \dfrac{1+\sin\varphi}{2}, \quad \sin^2\varepsilon = \dfrac{1-\sin\varphi}{2}, \\ \sigma^2 = \dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}, \quad \dfrac{\sin\varepsilon}{\cos(\varphi-\varepsilon)} = \dfrac{1}{1+2\sin\varphi}, \end{cases}$$

et où, en même temps, la face du mur est verticale, en sorte que

$$(l')\qquad \varepsilon_1 = 0, \quad L = p = y, \quad \varepsilon - \varepsilon_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2};$$

les formules de première approximation du 7 février ou celles (f'), (j'), réduites aux premiers termes entre crochets ou accolades, donnent

$$(m')\quad \begin{cases} \mathfrak{N} = N_1 = \Pi y \dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} = \Pi y \operatorname{tang}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right), \\ N_2 = \Pi y, \quad T = \mathfrak{T} = 0; \end{cases}$$

et les formules complètes (f'), (j') donneraient

$$(n')\quad \begin{cases} \mathfrak{N} = N_1 = \Pi y \operatorname{tang}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)\left(1 - \dfrac{\sin\varphi}{1+2\sin\varphi}\right) = \Pi y \dfrac{1-\sin\varphi}{1+2\sin\varphi}, \\ N_2 = \Pi y\left(1 - \dfrac{\sin\varphi}{1+2\sin\varphi}\right) = \Pi y \dfrac{1+\sin\varphi}{1+2\sin\varphi}, \\ \mathfrak{T} = T = -\Pi y \dfrac{\sin\varphi}{1+2\sin\varphi} \operatorname{tang}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) = -\Pi y \dfrac{1-\sin\varphi}{1+2\sin\varphi} \operatorname{tang}\varphi. \end{cases}$$

Le rapport de $-\mathcal{T}$ à $\mathcal{N}$ est $\tang\varphi$, comme cela doit être d'après la condition à remplir sur la face du mur.

Malgré la différence assez grande

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = 22^\circ \frac{1}{2}$$

si φ est 45 degrés, et $= 27$ degrés si φ est 36 degrés, il est possible que les formules (n') donnent encore des valeurs plus approchées des vraies poussées $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$ que les formules (m'). Mais elles procurent *moins de sûreté*, puisque d'après ce qu'on a dit à la Note du 14 février, l'on donne au mur des dimensions plus fortes quand on compte sur une poussée normale $\mathcal{N}$ plus considérable, et sur un frottement $\mathcal{T}$ plus faible. Même, ce n'est pas la moindre utilité des considérations et des calculs ci-dessus, de prouver analytiquement ce que la Note du 7-14 février [*] montrait par un raisonnement ne portant guère que sur $\mathcal{T}$, à savoir que les expressions des composantes $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$ de première approximation ne font erreur (quand elles ne sont pas tout à fait exactes) que dans un sens favorable à la stabilité de la construction à élever.

---

[*] Je reçois aujourd'hui l'envoi d'un Mémoire *On the Stability of loose Earth*, lu par M. Macquorn Rankine à la Société royale en juin 1856 (imprimé aux *Philosophical Transactions*), et dont je n'avais aucune connaissance non plus que M. Levy. L'illustre professeur de Glascow était arrivé en grande partie aux mêmes résultats que l'ingénieur français, ainsi qu'à quelques autres, d'une forme remarquable; et il proposait d'autres vues analytiques, d'un ordre transcendant, pour des recherches ultérieures plus avancées. Quant aux applications à l'évaluation de la poussée contre un mur, il donne, lorsque sa face est verticale, une solution revenant à ce que les formule de la Note du 7 février fournissent en supposant que l'angle du frottement de la terre contre la maçonnerie est égal à l'angle ω du talus supérieur du massif; et il conseille, quand la face du mur est inclinée, de joindre fictivement au mur, comme s'il y était invariablement uni, un prisme ou coin de terre terminé postérieurement par une face verticale. Cela peut suffire ordinairement pour la pratique; mais je crois que la solution générale que nous avons appelée de *première approximation*, appliquée à ε_1 quelconque et tel qu'il est (et qui coïncide avec celle de M. Rankine si $\varepsilon_1 = 0$), doit donner un résultat plus près de l'exactitude, qu'elle atteint, avons-nous dit, toutes les fois que ε_1 a la valeur appelée ε, correspondante à celle ω de l'angle du talus. M. Rankine a reproduit sa théorie dans son savant et utile *A Manual of applied Mechanics*, publié à Londres en 1861.

Je pense donc, soit qu'on ait peu ou beaucoup pour la différence $\varepsilon - \varepsilon_1$ ou pour l'excès, sur l'inclinaison du mur, de celle qu'il devrait avoir pour rendre exactes les formules de première approximation, que ce qu'il y aura généralement de mieux à faire sera de s'en tenir à celles-ci, qui, au reste, comme on a dit, seraient toujours et tout à fait exactes si l'angle du frottement des terres contre le mur avait, au lieu de la valeur φ, les valeurs φ_1 moindres; valeurs qu'on a spécifiées pour quelques cas (dans la supposition $\varphi = 45$ degrés) au tableau de chiffres du 14 février déjà cité.

Mémoire sur le déplacement des figures;

Par M. Charles BRISSE,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Tous les géomètres connaissent le beau Mémoire publié en 1843 par M. Chasles sur le déplacement des figures [*], Mémoire qui avait été précédé d'une Note insérée en 1831 au *Bulletin de Férussac* [**]. Je me propose de démontrer les théorèmes contenus dans cette Note et dans ce Mémoire, en commençant par les établir pour un déplacement fini [***].

PROPRIÉTÉS RELATIVES AU MOUVEMENT HÉLIÇOÏDAL.

Les mouvements que l'on conçoit le plus facilement sont les mouvements de translation et de rotation. Il est donc naturel de chercher si l'on ne pourrait pas amener un corps d'une première position à une seconde, à laquelle il est parvenu d'une manière quelconque, à l'aide de l'un de ces mouvements.

1. Quand le déplacement est celui d'une figure plane dans son plan, la question revient à amener une droite de la figure de son ancienne position AB à sa nouvelle A'B'. Or on reconnaît immédiatement qu'il est en général impossible d'y parvenir par une translation.

Si l'on y parvient par une rotation, c'est que les extrémités de la

---

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVI : Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.

[**] *Bulletin de Férussac*, t. XIV : Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entre eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit, d'un corps solide libre.

[***] Tous les passages guillemetés sont empruntés à M. Chasles.

droite auront décrit des arcs de cercle concentriques ayant respectivement AA′ et BB′ pour cordes. Le centre inconnu O ne pourra donc se trouver qu'à la rencontre des perpendiculaires élevées à ces droites en leurs milieux. Or, de l'égalité des triangles OAB, OA′B′ on conclut l'égalité des angles AOA′, BOB′ et par suite l'existence de la solution.

Si les deux perpendiculaires étaient parallèles, AA′ et BB′ le seraient également, et il suffirait d'une translation suivant leur direction pour amener AB en A′B′. En employant un langage connu, et en disant qu'on fait tourner AB autour du point situé à l'infini dans la direction des deux perpendiculaires, on peut énoncer le théorème général suivant :

« *Quelle que soit la position respective des deux figures, il existe toujours un point qui, étant considéré comme appartenant à la première figure, est lui-même son homologue dans la seconde; de sorte qu'il suffit de faire tourner la première figure autour de ce point pour la faire coïncider dans toutes ses parties avec la seconde* [*].

» Nous appellerons indifféremment *point central*, ou *centre de rotation*, ce point dans lequel coïncident deux points homologues des deux figures, et autour duquel on peut faire tourner une des figures pour la faire coïncider avec l'autre. »

« Quand le déplacement de la figure est infiniment petit, on en conclut que *les normales aux trajectoires des différents points d'une figure en mouvement passent toutes, à un instant du mouvement, par un même point*. Et de là résulte une méthode fort simple de déterminer les normales et les tangentes des courbes décrites dans le mouvement d'une figure de forme invariable [**]. »

---

[*] Cet énoncé est emprunté au Mémoire publié en 1860 par M. Chasles dans les *Comptes rendus*. Le théorème avait été donné, dans le *Bulletin de Férussac*, sous la forme suivante :

« *Quand deux polygones égaux sont placés d'une manière quelconque dans un plan, il existe toujours un point du plan qui est également distant de deux sommets homologues quelconques des deux polygones; ce point est semblablement placé par rapport aux deux polygones.* »

[**] Cette méthode a été indiquée pour la première fois par M. Chasles à propos de la courbe à longue inflexion décrite par un point du parallélogramme articulé de Watt (*Histoire des Machines à vapeur*, par Hachette, p. 85).

2. Quand le déplacement est celui d'un corps dans l'espace, la question revient à amener un triangle scalène, formé par trois points du corps, de son ancienne position ABC à sa nouvelle A'B'C'. Or on reconnaît immédiatement qu'il est en général impossible d'y parvenir par une translation.

Si l'on y parvenait par une rotation, c'est que les sommets du triangle auraient décrit des arcs de cercle ayant respectivement AA', BB' et CC' pour cordes; ces trois droites seraient donc parallèles à un même plan, ce qui n'a pas lieu en général.

La translation ou la rotation seules ne suffisant pas, il y a lieu d'essayer la combinaison des deux mouvements qui nous est le plus familière, c'est-à-dire le *mouvement héliçoïdal*. AA', BB', CC' seraient alors les cordes d'arcs d'hélices de même pas décrites autour d'un axe commun par les sommets du triangle. Cet axe serait donc tel que AA', BB', CC' auraient sur lui des projections égales; d'où il résulte qu'en menant par un point quelconque de l'espace des droites égales et parallèles à AA', BB', CC', leurs extrémités détermineront un plan qui sera perpendiculaire à la direction de l'axe cherché. Les droites AA' et BB' ayant sur cet axe des projections égales, il en sera de même pour les droites AB et A'B'; AB et A'B' auront donc aussi des projections égales sur un plan perpendiculaire à l'axe, et les projections *abc*, *a'b'c'* des deux triangles ABC, A'B'C' sur un pareil plan seront superposables. Un déplacement du triangle ABC, parallèlement à l'axe, d'une quantité égale à la projection de AA', n'altérant pas la projection *abc*, il suffira de chercher le point central des figures *abc* et *a'b'c'* pour avoir un point de l'axe autour duquel s'effectuera la rotation qui achève de faire coïncider les deux corps. Il en résulte les théorèmes suivants :

« *L'on peut toujours transporter un corps solide libre d'une position dans une autre position quelconque déterminée, par le mouvement continu d'une vis à laquelle ce corps serait fixé invariablement.* »

« *Quand on a dans l'espace un corps solide libre, si on lui fait éprouver un déplacement fini quelconque, il existera toujours dans ce corps une certaine droite indéfinie, qui, après le déplacement, se retrouvera au même lieu qu'auparavant.* »

« *Quand on a dans l'espace deux corps parfaitement égaux, et*

placés d'une manière quelconque, l'un par rapport à l'autre, il existe toujours dans l'espace une certaine droite indéfinie, qui, considérée comme appartenant au premier corps, est elle-même son homologue dans le second. »

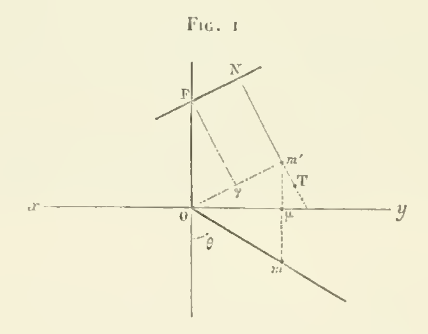
« *Quand on imprime à un corps solide libre un mouvement quelconque infiniment petit, il existe toujours dans ce corps une certaine droite qui glisse sur elle-même pendant que le corps tourne autour de cette droite; de sorte que le mouvement du corps n'est autre que celui d'une vis dans son écrou.* »

« *Tout mouvement infiniment petit d'un corps solide, retenu par un point fixe, n'est autre qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, mené par ce point.* »

5. Nous avons vu que les normales aux trajectoires des différents points d'une figure plane mobile dans son plan passaient toutes à chaque instant par un même point. Existe-t-il une propriété analogue pour le déplacement d'une figure plane dans l'espace?

Prenons pour plan horizontal de projection un plan mené par l'*axe du déplacement* perpendiculairement au plan donné; soit (*fig.* 1)

Fig. 1



mO la trace horizontale de ce plan. Le plan mené par O perpendiculairement à l'axe du déplacement sera le plan vertical, et la droite OF normale à la ligne de terre la trace verticale du plan donné; soient m, m' les projections d'un point quelconque M du plan. La tangente à l'hélice décrite par le point M, quand le plan passe d'une position à

une autre, est située dans le plan tangent au cylindre qui passe par M; elle se projette donc verticalement suivant la perpendiculaire $m'T$ à Om', et sa trace verticale est en un certain point T qui dépend de la grandeur du déplacement. Le plan normal à la tangente en M a pour trace verticale une parallèle FN à Om', qui coupe $m'T$ en un point N situé par rapport à m' du côté opposé à T et tel que

$$m'N \,.\, m'T = \overline{m\mu}^2\,;$$

en outre, F est un point de la trace du plan normal sur le plan donné.

Menons à $m'T$ la parallèle $F\varphi$; les triangles $OF\varphi$, $Om'\mu$ sont semblables et donnent

$$F\varphi \quad \text{ou} \quad m'N = OF\,\frac{O\mu}{Om'}.$$

On a d'ailleurs, en désignant par h le pas des hélices décrites et en remarquant que $m'T$ est la sous-tangente en M,

$$\frac{m\mu}{m'T} = \frac{h}{2\pi\,.\,Om'},$$

ou

$$m'T = \frac{2\pi\,.\,Om'}{h}\,m\mu.$$

Ces valeurs de $m'N$ et de $m'T$ portées dans la première équation la réduisent à

$$OF = \frac{h}{2\pi\,.\,O\mu}\,m\mu\,;$$

mais, en désignant par θ l'angle du plan donné avec l'axe du déplacement, on voit sur l'épure que

$$\frac{O\mu}{m\mu} = \operatorname{tang}\theta,$$

ce qui donne finalement

$$OF = h\,\frac{\cot\theta}{2\pi}.$$

D'où l'on conclut les théorèmes suivants :

« *Un plan étant considéré comme faisant partie du corps, les plans normaux aux trajectoires de ses points passeront tous par un même point du plan.* J'appellerai ce point le *foyer* du plan. »

« *Quand plusieurs plans sont parallèles entre eux, leurs foyers sont sur une droite qui est toujours parallèle à un même axe, quelle que soit la direction commune des plans.*

» *Cette droite jouit de la propriété que les trajectoires de ses points sont toutes parallèles entre elles,* » puisque, « *dans le déplacement du corps, la droite n'a qu'un mouvement de translation parallèlement à elle-même.* »

La projection verticale de la tangente à l'hélice décrite par le point F est parallèle à la ligne de terre; d'ailleurs, en appliquant la formule

$$\tang\alpha = \frac{2\pi R}{h}$$

qui donne l'angle α d'une hélice avec les génératrices du cylindre de rayon R sur lequel elle est tracée, on trouve

$$\tang\alpha = \frac{2\pi.\mathrm{OF}}{h},$$

et, en remplaçant OF par sa valeur,

$$\tang\alpha = \cot\theta.$$

Pour tout point du plan qui n'est pas sur OF, la projection verticale de la tangente n'est pas parallèle à la ligne de terre. Pour tout point de OF qui n'est pas F, la relation

$$\tang\alpha = \cot\theta$$

n'est pas satisfaite. Par conséquent :

« *Ce qui distingue le foyer d'un plan de tous ses autres points, c'est que sa trajectoire est perpendiculaire au plan, ce qui n'a lieu pour aucun autre de ses points.* »

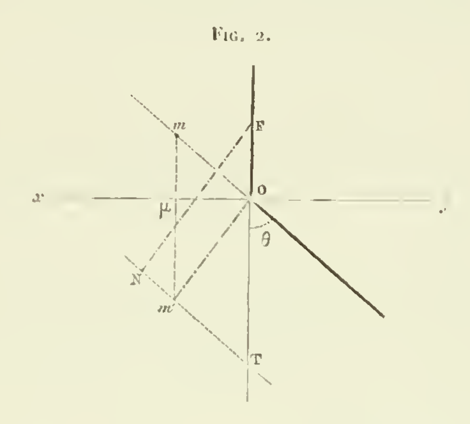
Cette propriété, jointe à celle qu'a le plan normal à la trajectoire

d'un point d'un plan de passer par le foyer de ce plan, conduit à la proposition suivante :

« *Quand plusieurs plans passent par un même point, leurs foyers sont tous sur un même plan, qui a son foyer en ce point.* »

4. Cherchons maintenant si, parmi les points du plan, il n'y en aurait pas dont les trajectoires soient tangentes au plan lui-même. Les traces verticales des tangentes aux hélices décrites par ces points seront

Fig. 2.



sur la trace verticale du plan, de sorte que les triangles $\mathrm{OT}m'$, $m'\mathrm{O}\mu$ (*fig.* 2) seront semblables; on aura donc

$$\frac{\mathrm{O}m'}{m'\mathrm{T}} = \frac{m'\mu}{\mathrm{O}\mu}.$$

Remplaçons $\mathrm{O}\mu$ et $m'\mathrm{T}$ par leurs valeurs

$$\mathrm{O}\mu = m\mu \operatorname{tang}\theta, \quad m'\mathrm{T} = \frac{2\pi . \mathrm{O}m'}{h}\, m\mu,$$

il viendra

$$m'\mu = h\,\frac{\operatorname{tang}\theta}{2\pi},$$

quantité constante. Par conséquent :

« *Dans le plan, il existe une infinité de points dont les trajectoires seront comprises dans le plan même; tous ces points sont situés en*

ligne droite. J'appellerai cette droite la *caractéristique* du plan; je dirai plus loin la raison de cette dénomination. »

Un point de la caractéristique d'un plan étant connu, la caractéristique s'obtient en menant par ce point un plan perpendiculaire au plan donné et parallèle à l'axe du déplacement.

Il résulte de là qu'un plan, mené par la tangente à la trajectoire d'un point et par la plus courte distance de cette tangente à l'axe du déplacement, a cette tangente pour caractéristique. D'ailleurs, la caractéristique est tangente à la trajectoire du pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur elle, puisque cette perpendiculaire est normale à l'hélice décrite. On peut donc énoncer le théorème suivant :

« *La tangente à la trajectoire d'un point jouit de la propriété d'être la caractéristique d'un plan; et réciproquement, la caractéristique d'un plan est toujours tangente à la trajectoire d'un de ses points.* »

5. Considérons une droite fixe D et un plan variable P mené par cette droite. Le foyer du plan P sera dans le plan normal à la trajectoire d'un des points p de la droite, il sera également dans le plan normal à la trajectoire d'un autre point p', et par suite il décrira l'intersection Δ de ces deux plans.

Soient P et P' deux plans menés par D, ϖ et ϖ' leurs foyers ou points de rencontre avec Δ. P est normal à la trajectoire du point ϖ, P' à la trajectoire du point ϖ', et par suite le foyer d'un plan mobile autour de Δ décrit l'intersection D des plans P et P'. Donc :

« *Quand plusieurs plans passent par une même droite* D, *leurs foyers sont sur une deuxième droite* Δ; *réciproquement, si plusieurs plans passent par cette droite* Δ, *leurs foyers seront sur la première droite* D. *De sorte que ces deux droites jouissent de propriétés réciproques.*

» Cela signifie, en d'autres termes, que *si l'on considère une droite quelconque* D *comme faisant partie du corps, les plans normaux aux trajectoires des points de cette droite passeront tous par une même droite* Δ; *et réciproquement, les plans normaux aux trajectoires des points de cette droite* Δ, *considérée comme faisant partie du corps, passeront tous par la droite* D.

» Ces deux droites D, Δ, que j'appellerai *droites conjuguées*, donnent lieu à un grand nombre de propriétés du mouvement infiniment petit du corps, qui trouveront leur place plus loin. »

Quand la droite D est la caractéristique d'un plan, les plans normaux aux trajectoires de ses points sont normaux au plan, et, comme ils passent par son foyer F, on en conclut que :

« *La tangente à la trajectoire d'un point a pour conjuguée la caractéristique du plan dont ce point est le foyer; ou, en d'autres termes, si, par le foyer d'un plan, on mène la normale au plan, la droite conjuguée à cette normale sera la caractéristique du plan.* »

6. Soient P et P′ deux positions quelconques d'une figure plane, $a'b'$ l'intersection de leurs plans, ab l'homologue dans le plan P de $a'b'$ considérée comme appartenant à P′. Une rotation du plan P autour du point central des segments ab et $a'b'$, suivie d'une nouvelle rotation de ce plan autour de $a'b'$, amène les figures P et P′ à coïncider. Dans le premier mouvement, les points de ab ne sortent pas du plan P, et le point central est immobile; dans le second mouvement, les points de $a'b'$ sont immobiles, et le point central quitte normalement P. « Il suit de là que :

» *Le mouvement du plan se réduit à une rotation autour de la caractéristique, pendant que cette droite tourne dans la position primitive du plan, autour de son foyer considéré comme un point fixe.* »

En supposant les positions P et P′ infiniment voisines, « on peut donc dire, en général, que :

» *Tout déplacement infiniment petit d'une figure plane dans l'espace se réduit à une rotation du plan de la figure autour d'une droite de ce plan, pendant que cette droite tourne elle-même autour d'un point fixe sans sortir de la position primitive du plan.*

» Cette droite est donc l'intersection des deux positions infiniment voisines du plan. C'est pourquoi je l'ai appelée *la caractéristique du plan,* suivant l'expression employée par Monge dans la théorie des surfaces développables. »

Considérons deux droites conjuguées D, Δ. Les plans normaux aux trajectoires des points de Δ passant par D, « par une rotation du corps

autour de la droite D, on placera la droite Δ dans la position même qu'elle doit occuper après le mouvement *infiniment petit* du corps. De sorte que, pour placer le corps dans la position même qu'il occupera après ce mouvement, il suffit de lui faire éprouver une seconde rotation autour de la droite Δ. Ainsi :

» *Les deux droites conjuguées* D *et* Δ *sont deux axes de rotations simultanées qu'on peut imprimer au corps pour effectuer son déplacement.*

» Je dirai plus loin quelle est la valeur de chaque rotation, et quelles sont les relations générales, soit entre les grandeurs des deux rotations, soit entre les directions de leurs axes D et Δ. »

PROPRIÉTÉS RELATIVES A DEUX DROITES CONJUGUÉES D, Δ.

7. Il peut arriver que le plan normal à la trajectoire d'un point p de la droite D passe par cette droite; ce plan, qui contient Δ, a pour foyer p. Le plan normal à la trajectoire d'un autre point p' de D passant par p', par p et par Δ, D et Δ coïncident; donc :

« *Si la droite* D *est normale à la trajectoire d'un de ses points, tous ses autres points auront leurs trajectoires normales à cette droite. De sorte que la droite* D *sera elle-même sa conjuguée* Δ », *et que tout plan passant par* D *aura son foyer sur cette droite.*

« Il suit de là que :

» *Quand une droite de longueur constante se meut dans l'espace, de manière à être toujours normale à la courbe décrite par l'une de ses extrémités, elle sera normale aussi à la courbe décrite par son autre extrémité. Et si, sur une surface engendrée par une ligne droite, on trace deux courbes qui coupent à angle droit toutes les génératrices, les segments compris sur ces droites entre les deux courbes seront tous égaux entre eux.* »

8. Considérons deux droites conjuguées quelconques D, Δ, et une droite L qui les rencontre. Le point où Δ perce le plan mené par L et par D est le foyer de ce plan, et il est situé sur L; donc :

« *Toute droite qui s'appuie sur ces deux droites jouit de la propriété d'être normale aux trajectoires de tous ses points.* »

Soient D, Δ, D′, Δ′ deux couples de droites conjuguées. Toute droite L qui s'appuie sur D, Δ et D′ est normale aux trajectoires de tous ses points. Menons le plan normal à la trajectoire du point commun à L et à D′, il passera par Δ′; d'ailleurs, il contiendra L. Donc :

« *Deux droites conjuguées* D, Δ *et deux autres droites conjuguées quelconques* D′, Δ′ *sont toujours quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe, c'est-à-dire que toute droite qui s'appuiera sur trois de ces lignes rencontrera nécessairement la quatrième.* »

9. Menons par D un plan parallèle à Δ, par Δ un plan parallèle à D; les foyers de ces plans seront sur une parallèle à l'axe du déplacement, puisqu'ils sont parallèles entre eux. Or le foyer du plan mené par D est à la rencontre de ce plan avec Δ, et, comme Δ ne rencontre pas le plan, il en est de même d'une parallèle à l'axe du déplacement, et par suite de l'axe du déplacement lui-même. La plus courte distance des deux droites étant normale aux plans est donc normale à l'axe du déplacement, et l'on peut mener à cet axe par la plus courte distance un plan perpendiculaire. Ce plan a, d'une part, son foyer sur la plus courte distance, puisqu'elle est à elle-même sa conjuguée, et, d'autre part, sur l'axe du déplacement, puisqu'il lui est normal. Par conséquent :

« *La droite par laquelle se mesure la plus courte distance de deux droites conjuguées* D, Δ *rencontre l'axe de rotation et lui est perpendiculaire.* »

Les trois droites D, Δ et l'axe du déplacement étant parallèles à un même plan, une droite mobile qui s'appuie sur elles engendre un paraboloïde hyperbolique. Cette droite mobile est normale aux trajectoires de tous ses points, et, comme son point de rencontre avec l'axe a l'axe pour trajectoire, elle est normale à l'axe. Par conséquent :

« *Tout plan perpendiculaire à cet axe rencontre les deux droites* D, Δ *et l'axe lui-même, en trois points qui sont en ligne droite; ou, en d'au-*

tres termes, par deux droites conjuguées D, Δ, *et par l'axe de rotation, on peut faire passer un paraboloïde hyperbolique dont les génératrices seront perpendiculaires à cet axe.* »

10. Soit p le point de rencontre de deux droites D et D′, Δ et Δ′ leurs conjuguées. Le plan normal à la trajectoire du point p, qui a son foyer en ce point, passe par Δ et par Δ′; donc :

« *Quand deux droites* D, D′ *se rencontrent, leurs conjuguées* Δ, Δ′ *se rencontrent aussi.* »

Il en résulte immédiatement que :

Si une droite variable D *engendre une surface réglée du second ordre, il en est de même de sa conjuguée* Δ.

On prouverait de la même manière que :

« *Quand plusieurs droites* D, D′, ... *passent par un même point, leurs conjuguées* Δ, Δ′,... *sont dans un même plan qui est normal à la trajectoire de ce point; réciproquement, quand plusieurs droites sont dans un même plan, leurs conjuguées passent toutes par un même point qui est le foyer de ce plan.* »

Si les droites D, D′, ... sont parallèles entre elles, on pourra mener par ces droites une série quelconque de plans parallèles entre eux, dont les foyers appartiendront respectivement à leurs conjuguées Δ, Δ′, ... Or ces foyers sont situés sur une parallèle à l'axe du déplacement; donc :

« *Quand plusieurs droites sont parallèles entre elles, leurs conjuguées sont dans un plan parallèle à l'axe de rotation.* »

11. « *Quand une droite est située dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, sa conjuguée passe par le point où le plan rencontre cet axe.* » Ce point est, en effet, le foyer du plan.

« *Réciproquement, si une droite rencontre l'axe de rotation en un point, sa conjuguée est située dans le plan mené par ce point perpendiculairement à cet axe.* » Ce plan est, en effet, normal à la trajectoire du point.

12. Soit A un point d'une droite D dont la trajectoire est dirigée

suivant cette droite, le plan mené par A normalement à D contiendra sa conjuguée Δ. Le plan mené par D normalement à Δ aura son foyer sur Δ; donc :

« *Quand une droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, sa conjuguée est aussi tangente à la trajectoire d'un de ses points. Ces deux droites sont à angle droit, et la droite qui mesure leur plus courte distance est celle qui joint les deux points aux trajectoires desquels elles sont tangentes.* »

En rapprochant la démonstration qui précède de la propriété qu'a la tangente à la trajectoire d'un de ses points d'avoir pour conjuguée la caractéristique du plan dont ce point est le foyer, on obtient cet autre énoncé :

« *Quand une droite est la caractéristique d'un plan, sa conjuguée est aussi la caractéristique d'un autre plan : ces deux plans sont à angle droit; le foyer du premier est sur la deuxième droite, et le foyer du second est sur la première droite. La droite qui joint ces deux foyers est celle qui mesure la plus courte distance des deux droites.* »

15. Par une droite D et par sa conjuguée Δ menons à un plan donné P deux plans perpendiculaires. L'intersection de ces plans est normale aux trajectoires de ses points, puisqu'elle s'appuie sur deux droites conjuguées; or elle est normale au plan P au point de concours des projections de D et de Δ; donc :

« *Deux droites conjuguées quelconques étant projetées orthogonalement sur un plan quelconque, leurs projections se coupent en un point situé sur la caractéristique de ce plan.* »

Si d et δ sont les points où D et Δ percent le plan P, ce plan a son foyer sur la droite $d\delta$ normale aux trajectoires de ses points, c'est-à-dire que :

« *Deux droites conjuguées rencontrent un plan quelconque en deux points qui sont toujours en ligne droite avec le foyer du plan.* »

PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX TRAJECTOIRES DES POINTS ET AUX CARACTÉRISTIQUES DES PLANS D'UN CORPS EN MOUVEMENT.

14. Soient D et Δ deux droites conjuguées, D′ la tangente à la trajectoire d'un point d de D et Δ' sa conjuguée. La plus courte distance de D′ et de Δ' s'appuie en d sur D et sur l'axe du déplacement auquel elle est normale; elle rencontre donc en δ la conjuguée Δ de D et engendre, quand d varie, un paraboloïde hyperbolique. Le plan tangent en δ à ce paraboloïde ayant son foyer en d, une parallèle à D′ menée par δ engendre le paraboloïde des normales le long de Δ; il en résulte que D′ engendre aussi un paraboloïde ayant avec le paraboloïde des normales une génératrice commune à l'infini et mêmes plans tangents le long de cette génératrice. Le plan de D′ et de $d\delta$, qui a pour caractéristique D′ et pour foyer le point de rencontre F de Δ' et de $d\delta$, est tangent à ces deux paraboloïdes et enveloppe, par conséquent, une surface développable du quatrième ordre [*]. D′ engendrant un paraboloïde qui admet D pour génératrice, Δ' engendre un hyperboloïde qui contient Δ conjuguée de D, et F décrit l'intersection de cet hyperboloïde avec le paraboloïde de $d\delta$, c'est-à-dire une cubique gauche, puisque les deux surfaces ont en commun la génératrice Δ. D'où les théorèmes suivants :

« *Les tangentes aux trajectoires des différents points d'une droite forment un paraboloïde hyperbolique.*

» *Chacune de ces tangentes est la caractéristique d'un plan; tous ces plans enveloppent une surface développable du quatrième degré, et ils ont leurs foyers sur une courbe à double courbure du troisième ordre.* »

Si l'on observe que le plan de Δ et de $d\delta$ a pour foyer d et pour caractéristique la conjuguée de D′ normale au plan en son foyer, c'est-à-dire Δ', que Δ' est tangente à la trajectoire du point F, et que ce point est le foyer du plan de D′ et de $d\delta$, on pourra mettre les résultats précédents sous cette forme nouvelle :

---

[*] *Mémoire sur les surfaces du deuxième degré engendrées par une ligne droite*, par M. Chasles; n° 69.

« *Quand plusieurs plans passent par une même droite, leurs caractéristiques forment un hyperboloïde à une nappe.*

» *Chacune de ces droites est tangente à la trajectoire d'un de ses points; tous ces points sont situés sur une courbe à double courbure du troisième ordre, et les plans normaux à leurs trajectoires enveloppent une surface développable du quatrième degré.* »

Un quelconque de ces plans, ayant en commun avec la surface une génératrice de contact, c'est-à-dire une conique infiniment aplatie, coupe la surface suivant une autre conique. Un plan quelconque mené par un point de la courbe à double courbure, n'ayant avec cette courbe que deux autres points communs, ne coupe le cône qui a la courbe pour base et le premier point pour sommet que suivant deux génératrices. Par conséquent :

« *Tout plan tangent à la surface développable la coupe suivant une conique; et tout cône qui passe par la courbe à double courbure, et qui a son sommet en un de ses points, est du second degré.* »

15. Si la droite D est elle-même tangente à la trajectoire d'un de ses points, elle est la caractéristique d'un plan, et les tangentes aux trajectoires de ses autres points sont comprises dans ce plan. Soit f un point quelconque de D et φ le foyer du plan; la tangente à la trajectoire du point f est normale à φf, de sorte que le lieu des projections de φ sur les diverses tangentes est une droite, ce qui caractérise une parabole. Par conséquent :

« *Quand une droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, les tangentes aux trajectoires de ses autres points sont toutes comprises dans un même plan, et enveloppent une parabole qui a pour foyer le point que nous avons appelé le foyer du plan.* »

Les droites telles que D' étant dans un même plan, leurs conjuguées Δ' passent par le foyer φ du plan et engendrent un cône au lieu d'un hyperboloïde. Par conséquent :

« *Quand une droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, les plans menés par cette droite ont leurs caractéristiques sur un cône du second degré.* »

La tangente à la trajectoire de tout point qui se dirige vers le som-

met φ de ce cône est la caractéristique d'un plan. Tous ces plans contenant la tangente à la trajectoire de φ passent par une même droite, et leurs caractéristiques sont sur un cône qui ne diffère pas du précédent. Les points F, aux trajectoires desquels les génératrices du cône sont tangentes et qui sont distribués sur une courbe du troisième ordre, jouissent donc exclusivement de la propriété de se diriger au même instant vers le point φ de l'espace. Par conséquent :

« *Les points dont les trajectoires se dirigent vers un même point fixe de l'espace sont tous sur une courbe à double courbure du troisième ordre, les tangentes aux trajectoires de ces points forment un cône du second degré et les plans normaux à ces trajectoires enveloppent une développable du quatrième degré.* »

16. Soit F un point de la courbe à double courbure, φ le sommet du cône et P le plan tangent à la développable normal en F à $F\varphi$; ce plan coupe la développable suivant une conique. Menons, en un des points f de la conique, un plan tangent à la développable, il coupera le plan P suivant une droite D tangente en f à la conique, passera par un point F' de la cubique et sera normal en ce point à la génératrice $F'\varphi$. Le plan $FF'\varphi$ coupe normalement D en un point i dont la trajectoire, à angle droit sur Fi et sur $F'i$, est précisément dirigée suivant D. Le point i appartient donc à la caractéristique du plan, et l'on en conclut, conformément au n° **15**, que :

« *Chacun des plans coupe la développable suivant une parabole qui a son foyer sur la courbe à double courbure.* »

Les caractéristiques des plans P, P',... étant les conjuguées des génératrices $F\varphi$, $F'\varphi$,... qui passent par le point fixe φ, il en résulte que :

« *Les caractéristiques de ces plans sont toutes comprises dans un même plan, qui est celui qui a pour foyer le point fixe.* »

La droite FF' qui joint les foyers des plans P et P' menés par D est la conjuguée de cette droite; elle est d'ailleurs la caractéristique du plan $FF'\varphi$, puisqu'elle a les trajectoires de deux de ses points dirigées dans ce plan. Par conséquent :

« *Toute droite qui s'appuie en deux points sur la courbe à double*

courbure est tangente à la trajectoire d'un de ses points, et la droite d'intersection de deux plans tangents à la développable est aussi tangente à la trajectoire d'un de ses points. »

Si l'on observe que les tangentes aux trajectoires des points de la caractéristique d'un plan sont les seules droites de ce plan pouvant jouer le rôle de caractéristiques, qu'une droite tangente à la trajectoire d'un de ses points n'est la caractéristique que d'un seul plan et n'a qu'une conjuguée normale au plan en son foyer, on pourra énoncer la réciproque suivante :

« *Les plans qui ont leurs caractéristiques situées dans un même plan fixe enveloppent une développable du quatrième degré, leurs foyers sont situés sur une courbe à double courbure du troisième ordre et les normales à ces plans, menées par leurs foyers, forment un cône du second degré. Les plans dont ces normales sont les caractéristiques passent tous par une même droite, qui est tangente à la trajectoire du foyer du plan fixe.* »

17. Le plan $FF'\varphi$, pivotant autour du point φ, coupe la courbe du troisième ordre en deux points F et F′ qui déterminent sa caractéristique FF′, et le point à la trajectoire duquel cette caractéristique est tangente décrit une surface dont le degré égale le nombre de ses points de rencontre avec la droite FF′. Tous les points de cette droite ayant leurs trajectoires dirigées dans le plan $FF'\varphi$, et les droites φF, FF', $F'\varphi$ étant, dans ce plan, les seules qui s'appuient en deux points sur la cubique, la droite FF′ ne coupe la surface qu'en trois points. Par conséquent :

« *Quand des plans passent par un même point, leurs caractéristiques s'appuient toutes sur une même courbe à double courbure du troisième ordre et les points où ces droites sont tangentes à leurs trajectoires sont situés sur une surface du troisième degré.* »

18. Menons les tangentes aux trajectoires de tous les points d'un plan P, les plans qui auront ces tangentes pour caractéristiques seront tangents à une surface. Mais les points aux trajectoires desquels les caractéristiques des plans menés par une même droite L sont tangentes

appartiennent, comme on l'a vu au nº **14**, à une cubique gauche; le plan P n'étant coupé qu'en trois points par cette cubique, la surface n'admet que trois plans tangents issus de L. Par conséquent :

« *Si l'on mène les tangentes aux trajectoires de tous les points d'un plan, ces droites seront les caractéristiques d'autant de plans, et tous ces plans envelopperont une surface courbe jouissant de la propriété que par une même droite quelconque on ne peut lui mener que trois plans tangents.* »

SUR LE MOUVEMENT D'UNE SURFACE COURBE.

19. A chaque point f d'une surface courbe mobile S correspond un plan normal à la trajectoire de f, qui touche en φ une deuxième surface Σ. Prenons sur S trois points infiniment voisins de f, le point de rencontre des plans normaux aux trajectoires de ces trois points sera le foyer du plan tangent à S en f et appartiendra à Σ. Il sera d'ailleurs le point de contact du plan normal à la trajectoire de f avec Σ, c'est-à-dire qu'il ne différera pas de φ. Le foyer du plan tangent à S en f étant en φ sur Σ, ce plan est normal à la trajectoire du point φ entraîné dans le mouvement de S, « de sorte que les deux surfaces jouissent de propriétés réciproques l'une par rapport à l'autre. » Ainsi :

« *Quand une surface courbe éprouve un mouvement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses points enveloppent une deuxième surface courbe qui jouit de cette propriété, que, si elle était primitivement tracée et qu'elle participât au mouvement de la première surface, les plans normaux aux trajectoires de ses points envelopperaient cette première surface.* »

« On peut encore dire que *la deuxième surface est le lieu des foyers des plans tangents à la première*, et que *celle-ci est le lieu des foyers des plans tangents à la deuxième.* »

Si la surface S est géométrique et du $m^{ième}$ degré, une droite quelconque la rencontrera en m points réels ou imaginaires, et à chacun de ces points correspondra un plan tangent à la surface Σ qui passera par la conjuguée de la droite. La surface Σ est donc telle qu'on peut

lui mener par une droite quelconque m plans tangents réels ou imaginaires, c'est-à-dire qu'elle est géométrique et de la $m^{ième}$ classe. D'où les théorèmes suivants :

« *Si la première surface est géométrique, la deuxième le sera aussi, mais, en général, d'un degré différent.*

» *Le nombre des plans tangents, réels ou imaginaires, qu'on pourra mener à chaque surface par une même ligne droite, sera égal au nombre de points, réels ou imaginaires, dans lesquels l'autre surface sera rencontrée par une même ligne droite.*

» Il suit de là que, si la première surface est du second degré, la deuxième sera aussi du second degré. Ainsi :

» *Quand une surface du second degré éprouve un mouvement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses points enveloppent une deuxième surface du second degré; et si celle-ci était tracée primitivement et participait au mouvement de la première, les plans normaux aux trajectoires de ses points envelopperaient cette première surface.* »

Si la surface se réduit à une conique, les plans normaux aux trajectoires de ses points passent par le foyer du plan qui les contient. Donc :

« *Quand une section conique éprouve un mouvement infiniment petit dans l'espace, les plans normaux aux trajectoires de ses points enveloppent un cône du second degré qui a son sommet en un point du plan de cette courbe.* »

Si la surface se réduit à un cône, les plans normaux aux trajectoires des points d'une même génératrice passent par sa conjuguée. Or les conjuguées des diverses génératrices sont toutes dans le plan normal à la trajectoire du sommet du cône. Donc :

« Réciproquement, *quand un cône du second degré éprouve un déplacement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses points sont tous tangents à une conique dont le plan passe par le sommet du cône.* »

RELATIONS MÉTRIQUES RELATIVES AU MOUVEMENT INFINIMENT PETIT D'UN CORPS.

20. Soient F et Φ les pieds de la plus courte distance de deux droites conjuguées D, Δ, et O le point où cette plus courte distance rencontre à angle droit l'axe du déplacement X. F étant le foyer du plan déterminé par Δ et par O, et OF étant dans ce plan la normale à Δ issue du pied de l'axe X, l'angle (Δ, X) est celui qu'on a désigné par θ dans la *fig.* 1. De telle sorte que la relation établie au n° **5** devient, en y remplaçant OF par r,

$$r = h\,\frac{\cot(\Delta, X)}{2\pi},$$

ou

$$r \operatorname{tang}(\Delta, X) = \frac{h}{2\pi}.$$

En substituant au rapport $\frac{h}{2\pi}$ celui d'une ordonnée quelconque e décrite dans le mouvement hélicoïdal à l'abscisse curviligne v correspondante, on a cette proposition :

« *Soient v la rotation du corps autour de l'axe* X, *et e la translation de cet axe dans sa propre direction, c'est-à-dire l'espace décrit par chacun de ses points. Soient r la plus courte distance d'une droite* D *à l'axe* X, *et ρ la plus courte distance de la droite conjuguée Δ au même axe; ces deux lignes r et ρ se mesurent sur une même droite, comme il a été dit précédemment. Désignons par* (D, X) *et* (Δ, X) *les angles que les deux droites conjuguées font avec l'axe* X; *on aura, entre ces angles et les distances des deux droites à cet axe, les relations*

$$r \operatorname{tang}(\Delta, X) = \rho \operatorname{tang}(D, X) = \frac{e}{v}.$$

» Les deux droites D, Δ sont deux axes conjugués de rotation, c'est-à-dire deux axes autour desquels on peut donner au corps deux rotations simultanées pour opérer son déplacement. Nous pouvons donc dire qu'*un premier axe de rotation étant pris à volonté, l'incli-*

naison du deuxième axe sur l'axe central X *ne dépendra que de la distance du premier axe à cet axe central.* »

Si la droite D est tangente à la trajectoire d'un de ses points, sa conjuguée Δ sera à angle droit sur elle, et comme D, Δ et X sont parallèles à un même plan, les angles (D, X) et (Δ, X) seront complémentaires. Par conséquent :

« *Si la droite* D *est dirigée suivant la trajectoire d'un de ses points, la droite* Δ *sera dans le plan normal à cette trajectoire, et l'on aura*

$$\operatorname{tang} D \operatorname{tang} \Delta = 1;$$

d'où, » en remplaçant tang D et tang Δ par leurs valeurs $\frac{e}{v\rho}$ et $\frac{e}{vr}$,

$$\text{« } r\rho = \frac{e^2}{v^2} = \textit{constante.} \text{ »}$$

21. Soient F et Φ les pieds de la plus courte distance de deux droites conjuguées D, Δ. Si l'on amène Δ et par suite Φ dans leurs nouvelles positions au moyen d'une rotation Ω autour de D, FΦ se déplacera normalement à D et Φ décrira un arc de cercle infiniment petit ΦΦ′ ayant pour valeur

$$(r + \rho)\,\Omega.$$

Si l'on donne à Φ un mouvement hélicoïdal, l'arc d'hélice infiniment petit ΦΦ′ sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés e et $v\rho$, et aura pour valeur

$$\sqrt{e^2 + v^2\rho^2}.$$

On déduit de là

$$(1) \qquad (r + \rho)^2\,\Omega^2 = e^2 + v^2\rho^2,$$

et, par un raisonnement identique appliqué à Δ,

$$(2) \qquad (r + \rho)^2\,\omega^2 = e^2 + v^2 r^2,$$

en désignant par ω la rotation autour de cette droite.

Des relations

$$r \operatorname{tang}(\Delta, X) = \rho \operatorname{tang}(D, X) = \frac{e}{v}$$

on déduit

$$e^2 + v^2 r^2 = \frac{e^2}{\sin^2(\Delta, X)}, \quad e^2 + v^2 \rho^2 = \frac{e^2}{\sin^2(D, X)},$$
$$(r + \rho^2) = \frac{[vr \sin(D, X) + e \cos(D, X)]^2}{v^2 \sin^2(D, X)},$$

et, en remplaçant dans les équations (1) et (2),

$$\text{« } \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\sin(\Delta, X)}{\sin(D, X)}, \text{ »}$$

$$\text{« } \Omega^2 = \frac{e^2 v^2}{[vr \sin(D, X) + e \cos(D, X)]^2}, \quad \omega^2 = \frac{v^2(e^2 + v^2 r^2) \sin^2(D, X)}{[vr \sin(D, X) + e \cos(D, X)]^2},$$

de sorte que les valeurs de Ω et de ω sont exprimées « en fonction de la position de la première droite. »

Les équations (1) et (2) donnent encore, en y remplaçant les seconds membres par leurs valeurs écrites plus haut,

$$(r + \rho)\,\Omega = \frac{e}{\sin(D, X)}, \quad (r + \rho)\,\omega = \frac{e}{\sin(\Delta, X)},$$

d'où l'on tire

$$(r + \rho)^2\,\Omega\omega = \frac{e^2}{\sin(D, X)\sin(\Delta, X)},$$

et comme

$$\cos(D, \Delta) = \cos(D, X)\cos(\Delta, X) - \sin(D, X)\sin(\Delta, X),$$

il en résulte

$$2(r + \rho)^2\,\Omega\omega\cos(D, \Delta) = \frac{2e^2}{\operatorname{tang}(D, X)\operatorname{tang}(\Delta, X)} - 2e^2.$$

Remplaçons tang(D, X) et tang(Δ, X) par leurs valeurs, cette équation deviendra

$$2(r + \rho)^2\,\Omega\omega\cos(D, \Delta) = 2v^2 r\rho - 2e^2,$$

et, en l'ajoutant membre à membre avec les équations (1) et (2),

$$(r+\rho)^2[\Omega^2+\omega^2+2\Omega\omega\cos(D,\Delta)]=v^2(r+\rho)^2,$$

ou, en divisant par $(r+\rho)^2$,

$$\text{« } \Omega^2+\omega^2+2\Omega\omega\cos(D,\Delta)=v^2. \text{ »}$$

Revenons enfin à la relation

$$(r+\rho)^2\Omega\omega=\frac{e^2}{\sin(D,X)\sin(\Delta,X)},$$

et multiplions-la membre à membre avec celle-ci

$$\sin(D,\Delta)=\sin(D,X)\cos(\Delta,X)+\cos(D,X)\sin(\Delta,X),$$

nous aurons

$$(r+\rho)^2\Omega\omega\sin(D,\Delta)=e^2\left[\frac{1}{\tan g(\Delta,X)}+\frac{1}{\tan g(D,X)}\right].$$

Remplaçons tang(Δ, X) et tang(D, X) par leurs valeurs, cette équation deviendra

$$(r+\rho)^2\Omega\omega\sin(D,\Delta)=e^2\left(\frac{v\rho}{e}+\frac{vr}{e}\right)=ev(r+\rho),$$

ou, en divisant par $r+\rho$,

$$\text{« } (r+\rho)\Omega\omega\sin(D,\Delta)=ev. \text{ »}$$

« La première équation

$$\frac{\Omega}{\omega}=\frac{\sin(\Delta,X)}{\sin(D,X)}$$

prouve que, *si par un point on mène deux droites parallèles aux deux axes conjugués* D, Δ, *et proportionnelles aux rotations du corps autour de ces deux axes, la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites sera parallèle à l'axe central de rotation* X », puisque D, Δ et X sont parallèles à un même plan.

« La deuxième équation

$$\Omega^2 + \omega^2 + 2\Omega\omega\cos(D, \Delta) = v^2$$

prouve que *cette diagonale sera proportionnelle à la rotation du corps autour de cet axe* X.

» Enfin la troisième équation

$$(r + \rho)\Omega\omega\sin(D, \Delta) = ev$$

prouve que, *si sur les deux droites* D, Δ *on porte deux segments proportionnels aux rotations du corps autour de ces droites, le tétraèdre construit sur ces deux segments pris pour arêtes opposées aura un volume constant.* »

Soient en effet AB et CD deux arêtes opposées d'un tétraèdre ABCD. La longueur CD se déplaçant sur la droite CD, la base BCD et la hauteur du tétraèdre restent invariables; d'où il résulte que son volume dépend des longueurs portées sur les arêtes opposées, et est indépendant de la région qu'elles y occupent. Prenons alors pour BC la plus courte distance de ces arêtes; AB et CD étant respectivement égaux à ω et à Ω, nous aurons

$$\text{surf. BCD} = \tfrac{1}{2}(r + \rho)\omega.$$

L'angle ABC étant droit, le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet A du tétraèdre sur le plan de la base sera sur une parallèle à CD menée par B, et cette perpendiculaire aura pour valeur

$$\Omega\sin(D, \Delta),$$

ce qui conduit bien, pour le volume du tétraèdre, à l'expression écrite plus haut.

22. La trajectoire d'un point du corps est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont l'un parallèle et l'autre perpendiculaire à l'axe X du déplacement. La projection, sur une droite D, de la trajectoire d'un de ses points peut donc s'obtenir en faisant la somme

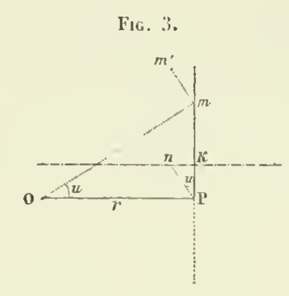
algébrique des projections de ces côtés. Le premier e, commun en grandeur et en direction à tous les points de la droite, a pour projection

$$e\cos(D, X).$$

Le second, variable avec la position du point, a aussi sur la droite une projection constante.

Prenons en effet pour plan horizontal de projection le plan normal à X mené par la plus courte distance de cette droite à D. L'axe X (*fig.* 3) se projettera en O, la droite D suivant Pm, l'un quelconque M de ses points en m, et la plus courte distance r de X à D sera la perpendiculaire OP abaissée de O sur Pm. L'arc de cercle décrit par le

Fig. 3.



point M, dans la rotation du corps autour de X, se projettera horizontalement en vraie grandeur suivant une perpendiculaire mm' à Om, et aura pour valeur v.Om. Toutes les droites telles que Pn, menées par le point P, égales et parallèles aux déplacements mm', auront leurs extrémités n sur une perpendiculaire nk à Pm; car des égalités

$$Pn = v.Om = v\frac{r}{\cos u},$$

on déduit

$$Pk = Pn.\cos u = vr = \text{const.}$$

On projettera donc à la fois sur D toutes les droites telles que Pn en menant par nk un plan perpendiculaire à D. Par conséquent :

« *Si l'on projette sur une droite* D *les trajectoires de ses différents points, les projections seront égales entre elles.* »

Pour avoir leur valeur commune p, nous projetterons sur D la trajectoire du point P, ce qui donnera

$$p = e\cos(D, X) + rv\sin(D, X),$$

et, en remplaçant le second membre par sa valeur en Ω trouvée plus haut,

$$p = \frac{ev}{\Omega};$$

d'où

$$« \quad \Omega . p = ve. \quad »$$

Ainsi, « *la longueur commune de ces projections est en raison inverse de la rotation du corps autour de cette droite.* »

« La projection p exprime la quantité dont chaque point de la droite D s'est déplacé dans le sens de la direction de cette droite ; de sorte qu'on peut dire que c'est le mouvement de la droite estimé dans sa propre direction. L'équation exprime donc que *la rotation du corps autour d'une droite quelconque est en raison inverse du mouvement de cette droite estimé dans sa propre direction.*

» Cela établit une relation assez remarquable entre la rotation et la translation, ces deux mouvements dont se compose tout déplacement d'un corps. »

Si p est la projection de la trajectoire MM' d'un point M sur une droite passant par ce point et si N est le point de rencontre de cette droite avec le plan perpendiculaire à MM' en M', on aura, dans le triangle rectangle MM'N,

$$\overline{MM'}^2 = p.MN,$$

ou, en remplaçant p par sa valeur,

$$\overline{MM'}^2 = \frac{ev}{\Omega} MN,$$

d'où l'on tire

$$MN = \frac{\overline{MM'}^2}{ev}\Omega.$$

Le premier facteur, dans le second membre, étant indépendant de la droite issue du point M, on en conclut que :

« *Si, sur différentes droites passant par un même point, on porte, à partir de ce point, des segments proportionnels aux rotations du corps autour de ces droites, les extrémités de ces segments seront sur un plan perpendiculaire à la trajectoire du point.*

» Il en résulte que *la rotation minimum aura lieu autour de la trajectoire même du point.* » En remplaçant alors, dans la formule précédente, MN par MM′, elle devient

$$\Omega . \mathrm{MM}' = e v,$$

et exprime que « *cette rotation, multipliée par la trajectoire du point, forme un produit constant, quel que soit le point.*

» Supposons, par exemple, qu'un point ait une étendue infiniment petite, que ce soit un petit globule; il aura une rotation autour de sa trajectoire, en même temps qu'il décrira cet élément rectiligne; il aura donc deux mouvements, l'un de rotation et l'autre de translation; *le produit de ces deux mouvements est constant pour tous les points du corps.* »

Soient D, D′,... des droites d'un plan, Δ, Δ′,... leurs conjuguées qui passent par le foyer F de ce plan. Une rotation du corps autour de D amènera Δ et par suite F dans sa nouvelle position F′, et de même pour les autres droites. Or le foyer, dans tous ces mouvements, décrit la même trajectoire FF′; donc, en appelant δ, δ',... les distances du foyer aux droites D, D′,... et Ω, Ω′,... les rotations autour de ces droites,

$$\Omega \delta = \Omega' \delta' = \ldots,$$

ce qui peut s'énoncer ainsi :

« *Quand plusieurs droites sont situées dans un même plan, les rotations du corps autour de ces droites sont en raison inverse de leurs distances au foyer du plan.* »

25. « Soit un plan P faisant partie du corps en mouvement; il y a à considérer, relativement à ce plan, son foyer, sa caractéristique,

sa rotation autour de cette droite, et sa rotation sur lui-même autour de son foyer. Soit Π la distance du foyer à l'axe X, ϖ la distance de la caractéristique à cet axe, P l'angle que le plan fait avec un plan perpendiculaire à l'axe X »; il est facile de voir, en se reportant au n° **3**, que ces quantités ne sont autres que OF, $m'\mu$ et le complément de θ. On aura donc, en remplaçant $\frac{h}{2\pi}$ par $\frac{e}{v}$,

$$« \quad \Pi = \frac{e}{v}\operatorname{tang} P, \quad \varpi = \frac{e}{v}\frac{1}{\operatorname{tang} P} \quad »,$$

d'où

$$« \quad \Pi\varpi = \frac{e^2}{v^2} = \text{const.},$$

et

$$\frac{\Pi}{\varpi} = \operatorname{tang}^2 P. \quad »$$

Si deux plans font avec un plan perpendiculaire à X des angles complémentaires, auquel cas

$$\operatorname{tang} P . \operatorname{tang} P' = 1,$$

on a

$$\Pi\Pi' = \varpi\varpi' = \frac{e^2}{v^2} = \text{const.},$$

d'où l'on conclut que :

« *Si deux plans font avec l'axe de rotation des angles complémentaires, les distances de leurs foyers à l'axe de rotation ont leur produit constant, et les distances de leurs caractéristiques au même axe ont aussi leur produit constant.*

» Soient Ω la rotation du plan P sur lui-même autour de son foyer, et ω sa rotation autour de sa caractéristique. » La conjuguée de la caractéristique d'un plan étant normale au plan en son foyer, reprenons les formules

$$(r+\rho)\Omega = \frac{e}{\sin(D, X)}, \quad (r+\rho)\omega = \frac{e}{\sin(\Delta, X)},$$

et remplaçons-y $r+\rho$ par $\Pi + \varpi$, $\sin(D, X)$ par $\sin P$ et $\sin(\Delta, X)$

par cos P. Nous aurons, en observant que

$$\Pi = \varpi = \frac{e}{\nu}\frac{1}{\sin P \cos P},$$

les deux relations

$$« \quad \Omega = \nu \cos P, \quad \omega = \nu \sin P;$$

d'où

$$\Omega^2 + \omega^2 = \nu^2 = \text{const.}$$

Ainsi, *la somme des carrés des deux rotations d'un plan est constante.* »

Si deux plans font avec un plan perpendiculaire à X des angles complémentaires, auquel cas

$$\cos^2 P + \cos^2 P' = \sin^2 P + \sin^2 P' = 1,$$

on a

$$\Omega^2 + \Omega'^2 = \omega^2 + \omega'^2 = \nu^2 = \text{const.};$$

d'où l'on conclut que :

« *Si deux plans font avec l'axe de rotation des angles complémentaires, la somme des carrés de leurs rotations sur eux-mêmes est constante, et la somme des carrés de leurs rotations autour de leurs caractéristiques est aussi constante.* »

Par le point de rencontre de la caractéristique d'un plan avec une droite D du plan, menons une parallèle à X et appelons (ω, D) l'angle de la caractéristique et de D. Le plan de X et de la caractéristique est normal au plan donné (4), et l'angle de X et de cette caractéristique, précédemment désigné par θ, n'est autre que le complément de P. On a donc, en appliquant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$\cos(D, X) = \cos(\omega, D)\sin P,$$

et, en multipliant membre à membre cette égalité avec la suivante

$$\nu \sin P = \omega,$$

on en conclut ce théorème :

« *Que dans le plan* P *on mène une droite quelconque* D, *on aura*

$$\omega \cos(\omega, D) = \nu \cos(D, X),$$

ω *étant la rotation autour de la caractéristique, et* (ω, D) *l'angle que cette caractéristique fait avec la droite* D; *de sorte que, pour chaque plan mené par une même droite* D, *on a*

$$\omega \cos(\omega, D) = \text{const.} \text{ »}$$

CONSTRUCTION DE L'AXE DE ROTATION X QUAND ON CONNAÎT LES DIRECTIONS DES TRAJECTOIRES DE TROIS POINTS DU CORPS.

« Soient a, b, c les trois points du corps. Les plans menés par les points a, b, perpendiculairement aux trajectoires de ces points, se couperont suivant une droite qui sera la conjuguée de la droite ab. On cherchera la droite qui mesure la plus courte distance de ces deux droites; elle s'appuiera sur l'axe cherché X, et elle lui sera perpendiculaire. On déterminera de même, avec les deux points a, c ou b, c, une autre droite jouissant des mêmes propriétés; l'axe X sera donc déterminé. »

PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

« Deux systèmes de deux droites conjuguées D, Δ et D′, Δ' forment quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe. Réciproquement, quatre génératrices d'un hyperboloïde peuvent être prises deux à deux et être regardées comme formant deux systèmes de deux droites conjuguées relativement au mouvement infiniment petit d'un corps solide. Il résulte de là que les propriétés des systèmes de deux droites conjuguées donnent lieu à des propriétés nouvelles de l'hyperboloïde à une nappe, propriétés dont la démonstration directe ne serait peut-être pas sans quelque difficulté.

» Soit donc un hyperboloïde à une nappe, et ne considérons que les génératrices d'un même mode de génération. Que, dans un plan

transversal mené arbitrairement, on mène par un point des sécantes dont chacune rencontrera deux génératrices; ces génératrices, ainsi conjuguées deux à deux, jouiront de toutes les propriétés de deux axes conjugués de rotation d'un corps. Par exemple, tout autre plan transversal rencontrera deux génératrices conjuguées en deux points qui seront en ligne droite avec un certain point de ce plan. La droite qui mesurera la plus courte distance de deux génératrices conjuguées passera par un même axe, auquel elle sera perpendiculaire; et les tangentes des angles que les deux génératrices feront avec cet axe seront entre elles comme les distances de ces deux droites à cet axe, etc. »

ANALOGIES ENTRE LES ROTATIONS D'UN CORPS AUTOUR DE DIVERS AXES ET LES SYSTÈMES DE FORCES.

24. Soit ω l'angle dont un point M tourne autour d'un axe Z dont il est distant de r; il décrit un élément rectiligne perpendiculaire au plan MZ et ayant pour valeur ωr. Si le déplacement du point M résulte de plusieurs rotations simultanées autour de différents axes, c'est en composant tous les éléments rectilignes issus de M qu'on aura l'élément rectiligne définitivement parcouru. Portons sur l'axe Z une longueur $k\omega$, k désignant une constante, et supposons le corps sollicité par la force $k\omega$; le moment de cette force, par rapport au point M, sera $k\omega r$. Élevons en M une perpendiculaire au plan MZ et portons sur cette perpendiculaire, dans le sens du déplacement du point M et à partir de ce point, une longueur égale à $k\omega r$. En composant tous les moments ainsi obtenus pour les différents axes, nous aurons le moment principal des forces relatif au point M, et il est clair que ce moment sera au déplacement total du point M comme k est à 1. Ainsi :

« *Quand un corps éprouve un déplacement infiniment petit, résultant de plusieurs rotations simultanées autour de plusieurs axes, si l'on porte sur ces axes des lignes proportionnelles à ces rotations respectivement, et qu'on considère ces lignes comme autant de forces qui solliciteraient le corps, l'élément rectiligne décrit par chaque point du corps, en vertu de ce système de rotations simultanées, sera proportionnel au moment principal des forces relatif à ce point.*

» Il suit de là que toutes les propriétés relatives aux rotations d'un corps autour de diverses droites, et aux espaces rectilignes décrits par les points du corps, donnent lieu à autant de propriétés d'un système de forces, relatives à ces forces elles-mêmes et à leurs moments par rapport aux différents points de l'espace.

» Ainsi les différentes propriétés relatives à deux axes conjugués de rotation, que nous avons appelés D et Δ, s'appliqueront aux systèmes de deux forces pouvant remplacer un autre système quelconque de forces. A l'axe X de rotation du corps correspondra cet axe que l'illustre auteur de la *Théorie des couples* a appelé l'*axe central des moments;* de sorte que, par exemple, nous pourrons dire que *la droite qui mesure la plus courte distance des deux forces qui remplacent un système de forces données rencontre toujours l'axe central des moments, et lui est perpendiculaire, quel que soit le système de ces deux forces,* etc..... »

SUR LE PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES. DIVERSES AUTRES ÉQUATIONS ANALOGUES, EXPRIMANT LES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE, SOIT D'UN SYSTÈME DE FORCES, SOIT D'UN SYSTÈME DE ROTATIONS.

25. « L'analogie qui a lieu entre un système de forces sollicitant un corps solide libre et les rotations qui produisent un déplacement infiniment petit du corps conduit naturellement à une démonstration du principe des vitesses virtuelles qui montre comment la considération du mouvement et de l'infini dans ce principe correspond à des considérations purement statiques.

» Soient P, P',... les forces qui sollicitent un corps solide libre et qui se font équilibre. Soient Q, Q',... d'autres forces quelconques. Considérons chaque force P et chaque force Q comme arêtes opposées d'un tétraèdre, et représentons par Σtétr.(P, Q) la somme des volumes de ces tétraèdres. Cette somme conservera la même valeur si, à chacun des deux systèmes P, P',... et Q, Q',..., on substitue un autre système de forces équivalent; et par conséquent cette somme sera nulle, car les forces P, P',... peuvent être remplacées par deux forces égales et directement opposées qui donneront lieu à deux sommes de

tétraèdres égales et de signes contraires. Réciproquement, si la somme des tétr. (P, Q) est nulle, quel que soit le système des forces Q, Q',..., on voit aisément que nécessairement les forces P, P', . . . se font équilibre.

» Ainsi, la condition d'équilibre des forces P, P',... s'exprime par

$$\Sigma\,\text{tétr.}\,(P, Q) = 0,$$

Q, Q', . . . formant un système de forces pris arbitrairement. Soit r la plus courte distance des deux forces P, Q; l'équation devient

$$\Sigma PQr\sin(P, Q) = 0.$$

» Supposons que toutes les forces Q, Q', . . . aient été remplacées par deux seules, dont l'une dirigée suivant la force P; et soit q l'autre force. La somme des tétraèdres où entre P sera égale simplement à tétr. (P, q), ou $Pqr\sin(P, q)$. Or $qr\sin(P, q)$ est la projection sur un plan perpendiculaire à la force P, du moment de la force q par rapport à un point de la force P. Si donc on suppose que les forces Q, Q', . . . soient en direction les axes de rotations proportionnelles à ces forces, le moment relatif à un point de la force P sera égal à l'élément rectiligne que ces rotations feront décrire à ce point. Soit p cet élément rectiligne; la somme des tétraèdres où entre la force P sera donc égale à $Pp\cos(P, p)$. Pour chacune des autres forces P', . . . on aura une somme semblable; de sorte que l'équation d'équilibre deviendra

$$\Sigma Pp\cos(P, p) = 0.$$

C'est l'équation des vitesses virtuelles.

» Ainsi, dans ce principe des vitesses virtuelles, les éléments rectilignes qu'on appelle les *vitesses virtuelles* expriment les moments principaux d'un autre système des forces par rapport aux points d'application des forces proposées. »

26. « Si l'on conçoit que le corps auquel sont appliquées les forces P, P',..., qui se font équilibre, éprouve un mouvement infiniment petit, il aura une certaine rotation autour de chacune des forces;

cette rotation sera en raison inverse de la projection de la trajectoire d'un point de cette force sur cette force. Soient donc $\theta, \theta', \ldots$ les rotations autour des forces $P, P', \ldots$; l'équation des vitesses virtuelles s'exprimera par l'équation $\sum \frac{P}{\theta} = 0$. Ainsi nous dirons que

» *Quand plusieurs forces qui sont appliquées à un corps solide libre se font équilibre, si l'on donne au corps un mouvement infiniment petit, par suite duquel il éprouvera une rotation autour de chacune des forces, la somme de ces forces divisées par ces rotations, respectivement, est nulle; et réciproquement, si cette somme est nulle quel que soit le mouvement infiniment petit du corps, les forces se feront équilibre.*

» Ainsi, l'équilibre d'un système de forces s'exprime par la considération des rotations du corps autour de ces forces, de même que par la considération des éléments rectilignes décrits par des points de ces forces.

» On peut exprimer de deux manières semblables l'équilibre d'un système de rotations qui solliciteraient un corps; car ces rotations se feront équilibre si des forces dirigées suivant leurs axes et proportionnelles à ces rotations se font elles-mêmes équilibre. »

Étude sur le mouvement des meules horizontales de moulins à blé, et méthodes pour les équilibrer;

Par M. YVON VILLARCEAU.

---

1. Les questions soulevées par le siége de Paris ont ramené mon attention sur une théorie à peine effleurée dans nos meilleurs traités de Mécanique appliquée, celle du mouvement des meules horizontales de moulins à blé, et sur les méthodes qu'on en peut déduire pour les équilibrer.

On sait qu'une meule, ayant été préalablement équilibrée *au repos*, c'est-à-dire de manière qu'en cet état sa face inférieure, qui est plane, soit horizontale; cette face prend ordinairement une inclinaison plus ou moins prononcée, dès qu'on fait tourner la meule autour de la verticale qui passe par le point de suspension. Ce résultat, nuisible à la bonne fabrication de la farine, est dû, tant aux irrégularités de figure de la meule, qu'au défaut d'homogénéité des matériaux dont elle est formée. Mais on peut obvier à ces inconvénients, en déplaçant convenablement certaines masses mobiles dans le sens perpendiculaire au plan de la face inférieure, que l'on nomme masses *réglantes*. La condition à remplir, et d'ailleurs bien connue, consiste à faire que la droite passant par le centre de gravité et le point de suspension soit un axe principal d'inertie pour ce dernier point. On ne peut songer à y satisfaire en ayant recours aux formules qui concernent les moments d'inertie : les mêmes causes qui produisent l'inclinaison de la meule pendant son mouvement s'opposent à l'emploi de ces formules, et l'on est conduit à rechercher, dans les mouvements observés, la mesure des causes d'irrégularité qu'il s'agit de faire disparaître.

Il m'a semblé qu'une étude analytique du mouvement des meules horizontales devait conduire à la solution la plus complète du pro-

blème et indiquer le genre et le mode des observations à effectuer, ainsi que les changements à faire subir aux positions des masses réglantes. D'ailleurs, une pareille étude s'ajoute aux applications encore peu nombreuses de la théorie du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, applications qui se réduisent à la toupie, au gyroscope et aux projectiles : trop longtemps on s'est borné à celles que nous offre la Mécanique céleste.

Le problème de la rotation d'un corps solide consiste à déterminer la série des positions d'un système d'axes rectangulaires, se coupant au point fixe, et lié solidairement avec le corps solide. Dans nos traités de Mécanique, le choix de ce système d'axes n'est généralement pas laissé arbitraire; les auteurs l'assujettissent à coïncider avec les axes principaux d'inertie relatifs au point fixe : l'application des formules qui se rapportent à ces axes ne convient pas au problème actuel, attendu que les sommes des produits des masses par les rectangles des coordonnées, qu'il s'agit précisément de déterminer, ne figurent pas dans ces formules : le choix des axes principaux a pour résultat de les faire disparaître. Celles dont il convient de faire usage, et dont les formules d'Euler sont un cas particulier, ont été données par Lagrange. Elles sont peu connues des ingénieurs; ce qui expliquerait comment la théorie de l'équilibre des meules horizontales n'a été jusqu'ici l'objet que de travaux incomplets.

Les formules de Lagrange permettent d'écrire les équations différentielles du mouvement avec la plus grande facilité : dans notre problème, le choix des axes mobiles se trouve, pour ainsi dire, indiqué d'avance. Deux d'entre eux sont dans un plan parallèle à la face inférieure de la meule, le troisième passe par son centre de gravité. Mais l'intégration ne peut s'effectuer sans introduire quelques restrictions : eu égard à ce que les petites oscillations de l'un des axes, par rapport à la verticale, offrent seules de l'intérêt, il suffit de les déterminer aux quantités près du deuxième ordre de petitesse. Alors on peut, conformément à la réalité des choses, traiter la différence des moments d'inertie autour des deux premiers axes, ainsi que les sommes de produits des masses par les rectangles des coordonnées, comme quantités du premier ordre. On considère encore, comme étant du

même ordre, l'erreur commise en calculant les divers moments, sans tenir compte des défauts d'exacte configuration ou d'homogénéité.

Les équations différentielles, réduites aux termes du premier ordre, sont au nombre de trois : l'une s'intègre immédiatement, et les deux autres forment un système d'équations linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants; ces dernières s'intègrent au moyen des *seules* fonctions trigonométriques et les intégrales ne tombent pas en défaut, dans le cas des racines égales de l'équation caractéristique, comme cela arrive lorsque l'on a affaire à une seule équation différentielle. C'est en choisissant pour variables, à l'exemple de Lagrange, deux des cosinus des angles compris entre les directions des axes mobiles et celles d'axes fixes, que l'on parvient à la forme très-simple de nos équations.

Les résultats du calcul se traduisent géométriquement comme il suit. La meule ayant été préalablement équilibrée *au repos*, imaginons un style vertical, dont l'axe passe par le point de suspension de la meule, et un plan parallèle à la face inférieure, qui soit entraîné dans son mouvement et destiné à recevoir les impressions du style; ce plan sera, par exemple, celui de la face supérieure de la meule. Par le point de rencontre du style avec ledit plan, dans la situation horizontale de la face inférieure de la meule, menons un système d'axes rectangulaires et parallèles aux axes mobiles. Voici ce qui se passera pendant le mouvement de la meule. Le rayon vecteur mené de l'origine à l'un des points du diagramme tracé par le style, mesurera l'inclinaison de l'axe de la meule par rapport à la verticale, et la ligne des nœuds du plan mobile sur l'horizon, sera perpendiculaire au plan vertical passant par le style et le point considéré du diagramme. Quant à la nature de la trajectoire tracée par le style, cette trajectoire peut être considérée comme une ellipse mobile autour d'un centre fixe, dont les axes conservent une grandeur constante et dépendante uniquement des constantes du mouvement oscillatoire initial. Suivant les relations de grandeur de ces constantes, l'ellipse dégénère en un cercle, en une ligne droite, ou se réduit à un point unique. Quoi qu'il en soit, la trajectoire se trouve comprise entre deux circonférences de cercle qui lui servent d'enveloppes et dont les rayons sont égaux au demi-

grand axe et au demi-petit axe de l'ellipse mobile. Suivant les cas, ces cercles-enveloppes se réduisent à un cercle unique ou à un point.

Le mouvement des axes de l'ellipse mobile est uniforme; il est d'ailleurs assez faible relativement au mouvement de rotation de la meule et de sens contraire à ce dernier.

Enfin, le mouvement sur l'ellipse mobile est tel que le rayon vecteur mené de son centre décrit, par rapport aux axes mobiles, des aires proportionnelles au temps, et dans un sens qui dépend des relations de grandeur des constantes du mouvement oscillatoire. La durée d'une révolution du rayon vecteur diffère peu de celle d'un tour de la meule.

Le diagramme ainsi obtenu fournit les éléments d'une *première* méthode pour équilibrer les meules horizontales : il suffit en effet d'y mesurer les deux coordonnées du centre commun des ellipses mobiles ou de leurs cercles-enveloppes et de déplacer les masses réglantes, au nombre de deux, de quantités proportionnelles respectivement à l'une et à l'autre de ces coordonnées. Le coefficient de proportionnalité s'obtient au moyen de calculs assez simples; il peut d'ailleurs se déduire de la comparaison des résultats obtenus dans deux états différents du système des masses réglantes. La théorie indique la position la plus favorable à leur donner : il convient que les centres de gravité de ces masses soient situés dans deux plans méridiens rectangulaires, et orientés à 45 degrés par rapport à l'axe transversal de l'anille.

Le mouvement vertical du style étant une quantité du second ordre, un défaut d'exacte verticalité est tout à fait négligeable : il n'en est pas ainsi d'un défaut de centrage; mais on s'en affranchit aisément.

Cette première méthode d'équilibrer les meules horizontales pourra, malgré sa simplicité, n'être pas accueillie par les praticiens : l'installation du style et l'exiguïté des dimensions de la courbe obtenue motiveront sans doute leurs répugnances. Au contraire, la *seconde* méthode, dont il nous reste à parler, rentre tout à fait dans les habitudes des ingénieurs.

La théorie montre que, les deux masses réglantes ayant reçu la disposition indiquée ci-dessus, *la position de chacune d'elles peut être déterminée séparément*. Dans le plan méridien qui contient le centre

de gravité de l'une des deux masses et sur le pourtour de la meule, fixons un léger style, par exemple une pointe de fer ou d'acier, vissée sur l'un des cercles de fer qui servent d'armature, et disposons une surface verticale fixe, pour recevoir les impressions du style : on notera *très-distinctement* la trace du style correspondante à l'état d'*équilibre statique* de la meule; puis, celle-ci étant mise en mouvement, le style produira des traces dont les ordonnées seront rapportées à celle qui répond à l'équilibre statique. Il ne reste plus qu'à déduire de ce genre d'observations l'*ordonnée moyenne* : on peut prendre, pour celle-ci, la simple moyenne des ordonnées maxima et minima. A l'aide de certaines précautions, il est facile d'obtenir ainsi un résultat indépendant des effets du frottement au point de suspension. Connaissant l'ordonnée moyenne, on détermine, par un calcul facile, le déplacement qu'il faut faire subir à la masse considérée. Si l'on veut réduire le calcul à celui d'une simple partie proportionnelle, il suffit de deux expériences faites en donnant à la masse réglante ses deux positions limites : de la comparaison des résultats obtenus, on déduit en effet la position correspondante à la valeur nulle de l'ordonnée moyenne; ce qui est la solution du problème. Pour la seconde masse réglante, on exécute une opération toute pareille; mais on voit que les deux opérations peuvent être effectuées simultanément : à cet effet, les deux styles doivent être établis à des niveaux assez différents, pour que les traces de l'un ne puissent être confondues avec celles de l'autre.

Les praticiens étant dans l'usage d'employer *quatre* masses réglantes au lieu de *deux*, il faut, si l'on veut se conformer à cet usage, déplacer simultanément, de quantités égales et de sens contraires, les deux masses situées dans un même plan méridien; de cette manière, la question n'offre qu'une seule inconnue, que l'on détermine par les mêmes méthodes que s'il s'agissait seulement de *deux* masses réglantes.

2. *Équations générales du mouvement de rotation d'un corps solide.* — Les formules de Lagrange peuvent être établies par des moyens plus simples et plus élémentaires que ceux employés par l'illustre géomètre; mais leur démonstration ne pouvant trouver place ici, je me bornerai à les extraire de la *Mécanique analytique* (édition de

M. J. Bertrand, t. II, p. 234), en y rétablissant sous une forme plus générale les moments des forces extérieures. Voici ces formules :

$$(1)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} - H\dfrac{dq}{dt} - G\dfrac{dr}{dt} + (C-B)qr + Hpr + F(r^2-q^2) - Gpq = P, \\ B\dfrac{dq}{dt} - F\dfrac{dr}{dt} - H\dfrac{dp}{dt} + (A-C)rp + Fqp + G(p^2-r^2) - Hqr = Q, \\ C\dfrac{dr}{dt} - G\dfrac{dp}{dt} - F\dfrac{dq}{dt} + (B-A)pq + Grq + H(q^2-p^2) - Frp = R. \end{cases}$$

La signification des lettres employées est la suivante.

Désignant, suivant l'usage, par x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un élément de masse m par rapport à trois axes rectangulaires qui se croisent au point fixe et sont liés au corps solide; par Σ la caractéristique de sommation étendue à tous les éléments m du corps solide; on a

$$(2)\quad \begin{cases} A = \Sigma m(y_1^2 + z_1^2), & F = \Sigma m y_1 z_1, \\ B = \Sigma m(z_1^2 + x_1^2), & G = \Sigma m z_1 x_1, \\ C = \Sigma m(x_1^2 + y_1^2), & H = \Sigma m x_1 y_1. \end{cases}$$

P, Q, R sont respectivement les sommes des moments des forces extérieures autour des axes mobiles des x_1, y_1, z_1 : elles sont positives, lorsque le sens des rotations qu'elles tendent à produire est celui de y_1 vers z_1, pour le premier; z_1 vers x_1, pour le second; et x_1 vers y_1, pour le troisième. Les lettres p, q, r désignent les composantes de la vitesse de rotation par rapport aux mêmes axes, et le sens positif de ces composantes est le même que celui des moments P, Q, R; dt est l'élément du temps.

Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes parallèlement aux axes mobiles, des forces extérieures appliquées au point (x_1, y_1, z_1); les valeurs de P, Q, R sont

$$(3)\ [*]\quad \begin{cases} P = \Sigma(Z_1 y_1 - Y_1 z_1), \\ Q = \Sigma(X_1 z_1 - Z_1 x_1), \\ R = \Sigma(Y_1 x_1 - X_1 y_1). \end{cases}$$

---

[*] Les formules (1) sont également celles du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point qui lui-même se déplace. Seulement les valeurs (3) de

Désignant par x, y, z des axes rectangulaires fixes et posant

$$(4)\quad \begin{cases} a = \cos(x_1, x), & b = \cos(y_1, x), & c = \cos(z_1, x), \\ a' = \cos(x_1, y), & b' = \cos(y_1, y), & c' = \cos(z_1, y), \\ a'' = \cos(x_1, z), & b'' = \cos(y_1, z), & c'' = \cos(z_1, z), \end{cases}$$

on a, entre ces cosinus, des relations bien connues et que le lecteur dispensera de reproduire ici.

Les expressions des composantes p, q, r en fonction de ces cosinus et de leurs dérivées donnent

$$(5)\quad \begin{cases} p\,dt = c\,db + c'\,db' + c''\,db'' = -(b\,dc + b'\,dc' + b''\,dc''), \\ q\,dt = a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = -(c\,da + c'\,da' + c''\,da''), \\ r\,dt = b\,da + b'\,da' + b''\,da'' = -(a\,db + a'\,db' + a''\,db''), \end{cases}$$

et l'on a inversement

$$(6)\quad \begin{cases} da = (b\,r - c\,q)dt, & db = (c\,p - a\,r)dt, & dc = (a\,q - b\,p), \\ da' = (b'r - c'q)dt, & db' = (c'p - a'r)dt, & dc' = (a'q - b'p), \\ da'' = (b''r - c''q)dt, & db'' = (c''p - a''r)dt, & dc'' = (a''q - b''p). \end{cases}$$

Il est à remarquer que les valeurs de p, q, r sont indépendantes du choix des axes fixes des x, y, z; cela résulte de l'interprétation géomé-

---

P, Q, R doivent, pour ce cas, être respectivement complétées par l'addition des termes suivants :

$$\frac{dv_1}{dt}\Sigma m z_1 - \frac{dw_1}{dt}\Sigma m y_1,$$

$$\frac{dw_1}{dt}\Sigma m x_1 - \frac{du_1}{dt}\Sigma m z_1,$$

$$\frac{du_1}{dt}\Sigma m y_1 - \frac{dv_1}{dt}\Sigma m x_1,$$

où l'on désigne par u_1, v_1, w_1 les composantes de la vitesse de l'origine des axes mobiles, parallèlement aux directions actuelles des x_1, y_1 et z_1 considérées comme fixes. On doit remarquer que ces termes complémentaires se réduisent à zéro dans deux circonstances : 1° lorsque la direction et la grandeur de la vitesse sont constantes; 2° quand l'origine des axes mobiles est au centre de gravité du corps solide : en sorte que les valeurs (3) des moments P, Q, R conviennent encore dans l'une et l'autre de ces circonstances.

trique de ces quantités. On peut d'ailleurs le vérifier par une transformation de coordonnées dans laquelle on introduit de nouveaux axes fixes des x, y, z; calculant les valeurs de p, q, r au moyen de ces nouveaux axes, on les trouve égales aux valeurs que fournissent les relations (5).

Les cosinus (4) s'expriment en fonctions des trois angles nécessaires et suffisants pour définir complétement la situation des axes mobiles par rapport aux axes fixes.

Considérons l'intersection du plan des x, y avec celui des x_1, y_1, et désignons par *nœud* la partie de cette intersection que rencontrerait l'axe x_1 en tournant dans le sens x_1 à y_1, et passant du côté des z positifs à celui des z négatifs. Des deux angles formés par les deux plans des x, y et x_1, y_1, nous désignerons par θ celui que forment les côtés positifs des axes des z et z_1, perpendiculaires respectivement à ces mêmes plans. Conformément à l'usage adopté, nous désignerons par ψ l'angle du *nœud* avec l'axe fixe des x, angle qui sera pris positif de x vers les y *négatifs*, et par φ l'angle de x_1 avec le *nœud*, mesuré positivement de celui-ci dans le sens de x_1 vers y_1. Nous éviterons ainsi l'emploi du mot *ascendant* par lequel on qualifie ordinairement le nœud, non sans quelques inconvénients, quand il s'agit d'autres problèmes que ceux de la Mécanique céleste. On voit que, moyennant ces conventions, la situation des axes mobiles est déterminée, sans ambiguité, par les valeurs des trois angles θ, ψ et φ.

Les valeurs de nos cosinus (4), en fonctions de ces trois angles, sont les suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} a &= \cos\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi, \\ b &= \cos\theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi, \\ c &= \sin\theta\sin\psi; \\ a' &= \cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi, \\ b' &= \cos\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi, \\ c' &= \sin\theta\cos\psi; \\ a'' &= -\sin\theta\sin\varphi, \\ b'' &= -\sin\theta\cos\varphi, \\ c'' &= +\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Les valeurs de p, q, r qui s'en déduisent par la différentiation, et au moyen des formules (5), sont

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},\\ q &= \cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},\\ r &= \quad -\cos\theta\frac{d\psi}{dt} + \qquad \frac{d\varphi}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Supposons les valeurs des composantes X_1, Y_1, Z_1, qui entrent dans P, Q, R, exprimées soit au moyen des cosinus a, a', a'', etc., soit au moyen des angles θ, ψ et φ, puis les expressions (5) ou (8) de p, q, r transportées dans les équations (1); on aura un système de trois équations différentielles du deuxième ordre entre lesdits cosinus ou les angles θ, ψ, φ et le temps t. Leur intégration, en ayant égard, s'il s'agit des cosinus a, b, c, etc., aux relations qui existent entre eux, fera connaître complétement la situation du corps solide en fonction du temps.

Bien que la considération directe des angles θ, ψ et φ ait pour résultat d'éliminer six inconnues et qu'il semble en résulter plus de facilité pour les calculs, il arrive pourtant, comme Lagrange l'a fait voir par quelques exemples, que l'emploi des neuf cosinus conduit parfois plus simplement au résultat; c'est ce qui arrivera précisément dans le cas du problème qui nous occupe. Ayant alors obtenu les valeurs des neuf cosinus, on en déduira aisément celles des trois angles : par exemple, connaissant a'' et b'', les formules (7) feront connaître φ et θ en laissant le signe de $\sin\theta$ arbitraire; la valeur de c'' donnera celle de $\cos\theta$ avec son signe; mais l'ambiguité de l'angle θ n'aura pas pour résultat de conduire à deux situations distinctes du système des axes mobiles, attendu que l'angle φ prendra en même temps des valeurs qui différeront de 180 degrés dans les deux systèmes : il en sera de même de l'angle ψ qu'on déduira des valeurs de c et c' (7). Il est seulement à remarquer qu'avec une valeur négative de $\sin\theta$, la position du *nœud* serait opposée à celle que nous avons définie. Pour avoir des résultats toujours conformes à cette définition, il faudra prendre $\sin\theta$ positif.

3. *Application des formules générales au mouvement d'une meule horizontale de moulin à blé.* — Nous prendrons pour axes mobiles des x_1, y_1, deux droites rectangulaires menées par le point fixe parallèlement à la face inférieure de la meule, et pour axe des z_1 le côté de la perpendiculaire à cette face qui est dirigé vers le zénith quand elle est horizontale.

On admettra que l'équilibre *statique* de la meule ait été préalablement obtenu moyennant une répartition des masses facile à réaliser. Dans cet état d'équilibre, le centre de gravité se trouvera sur l'axe des z_1. Nous en désignerons la distance au point fixe de suspension par L, et nous supposerons L positif lorsque, comme dans la pratique, le centre de gravité est au-dessous du point de suspension. Il en résulte que, si nous désignons par M la masse totale de la meule, nous aurons

$$(9) \qquad \Sigma m x_1 = 0, \quad \Sigma m y_1 = 0, \quad \Sigma m z_1 = -\text{ML}.$$

Nous prendrons, pour axes fixes des xy, deux droites rectangulaires situées dans le plan horizontal qui passe par le point de suspension et se croisant en ce point, et pour axe des z la direction du zénith.

En négligeant le frottement autour du centre de suspension et la résistance de l'air, on voit que les forces extérieures qui sollicitent le système se réduisent aux poids mg des masses élémentaires; leur direction étant opposée à celle de l'axe des z, les composantes X_1, Y_1, Z_1 de la force mg seront respectivement

$$-mg\cos(z, x_1), \quad -mg\cos(z, y_1), \quad -mg\cos(z, z_1),$$

ou, en vertu des relations (4),

$$-mga'', \quad -mgb'', \quad -mgc''.$$

Au moyen de ces valeurs, les moments P, Q, R (3) deviendront

$$\begin{aligned} \text{P} &= -gc''\Sigma m y_1 + gb''\Sigma m z_1, \\ \text{Q} &= -ga''\Sigma m z_1 + gc''\Sigma m x_1, \\ \text{R} &= -gb''\Sigma m x_1 + ga''\Sigma m y_1 : \end{aligned}$$

en vertu des relations (9), ils se réduisent à

$$(10) \qquad P = -b''gML, \quad Q = +a''gML, \quad R = 0.$$

Si l'on fait abstraction de l'armature intérieure, nommée anille, par laquelle la meule pose sur le point fixe, armature dont la masse est très-faible par rapport à la masse M, la meule se compose de divers solides compris entre des surfaces à peu près cylindriques et concentriques avec l'axe des z_1 (pierre meulière, couche de plâtre, armatures extérieures en fer); le défaut d'homogénéité de ces solides est d'ailleurs peu notable. On peut donc considérer les quantités F, G, H, définies par les relations (2), comme étant de petites quantités. Nous les traiterons comme du premier ordre de petitesse.

D'un autre côté, nous ne nous proposons d'étudier que les cas où les oscillations de l'axe z_1 autour de la verticale resteront très-petites: ces oscillations sont mesurées par l'angle θ; nous les considérerons comme étant du même ordre que F, G et H. Il résulte des relations (7) que a'' et b'' seront des quantités du premier ordre, et les mêmes relations (7) montrent que c et c' seront du même ordre. Les dérivées de ces quantités par rapport au temps seront également du premier ordre. Il suit de là, en vertu de la première valeur de pdt et de la deuxième de qdt (5), que les quantités p et q seront du premier ordre de petitesse. Il en sera de même de leurs dérivées. En conséquence de ces remarques et convenant de négliger les quantités du deuxième ordre et des ordres supérieurs, la troisième équation (1) se réduit, en vertu de la troisième équation (10), à

$$C\frac{dr}{dt} = 0;$$

on en déduit

$$(11) \qquad r = n,$$

n désignant une constante, positive lorsque la composante r a le sens de x_1 vers y_1 et négative dans le cas contraire.

Au moyen de ces relations et des équations (10), et, en transposant,

les deux premières équations (1) deviennent

$$(12)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)nq + Fn^2 + b''gML = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)np - Gn^2 - a''gML = 0. \end{cases}$$

Aux variables p et q, nous substituerons leurs expressions en fonction de a'', b'' et de leurs dérivées, que l'on tire des équations (6). Remarquons d'abord qu'en vertu de la relation

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$

la quantité c'' ne diffère de l'unité que de quantités du deuxième ordre Faisant donc $c'' = 1$ et remplaçant r par n, on tire des expressions (6) de db'' et da''

$$(13)\qquad p = a''n + \frac{db''}{dt}, \quad q = b''n - \frac{da''}{dt};$$

il s'ensuit

$$(14)\qquad \frac{dp}{dt} = n\frac{da''}{dt} + \frac{d^2b''}{dt^2}, \quad \frac{dq}{dt} = n\frac{db''}{dt} - \frac{d^2a''}{dt^2}.$$

Mettant ces valeurs dans les équations (12) et posant pour abréger

$$(15)\qquad K = gML,$$

on aura

$$(16)\quad \begin{cases} A\dfrac{d^2b''}{dt^2} + (A + B - C)n\dfrac{da''}{dt} + [K + (C - B)n^2]b'' + Fn^2 = 0, \\ -B\dfrac{d^2a''}{dt^2} + (A + B - C)n\dfrac{db''}{dt} - [K + (C - A)n^2]a'' - Gn^2 = 0, \end{cases}$$

équations linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants et faciles à intégrer.

Pour simplifier, nous poserons

$$(17)\qquad \begin{cases} E = (A + B - C)n, \\ U = K + (C - A)n^2, \\ V = K + (C - B)n^2. \end{cases}$$

En outre, et dans le but de faire disparaître les termes constants, nous ferons

$$(18)\qquad \begin{cases} U a'' + G n^2 = U \dfrac{x''}{\lambda}, \\ V b'' + F n^2 = V \dfrac{y''}{\lambda}, \end{cases}$$

x'' et y'' étant de nouvelles variables, et λ une constante dont on trouvera plus loin la signification géométrique. Par l'introduction de ces variables, les équations (16) deviendront

$$(19)\qquad \begin{cases} A \dfrac{d^2 y''}{dt^2} + E \dfrac{dx''}{dt} + V y'' = 0, \\ B \dfrac{d^2 x''}{dt^2} - E \dfrac{dy''}{dt} + U x'' = 0. \end{cases}$$

On aperçoit immédiatement que ces équations peuvent être satisfaites par des solutions de la forme

$$(20)\qquad x'' = \alpha \cos(mt + \eta), \quad y'' = \beta \sin(mt + \eta),$$

où α, η et m désignent des constantes. En effet, par la substitution de ces valeurs dans les proposées, il vient, suppression faite des facteurs communs,

$$\begin{aligned} - A\beta m^2 - E\alpha m + V\beta = 0, \\ - B\alpha m^2 - E\beta m + U\alpha = 0; \end{aligned}$$

d'où, en posant

$$(21)\qquad i = \frac{\beta}{\alpha},$$

l'on déduit cette double expression de i

$$(22)\qquad i = \frac{Em}{V - Am^2} = \frac{U - Bm^2}{Em},$$

et l'équation caractéristique propre à la détermination de m

$$(23)\qquad ABm^4 - (AU + BV + E^2)m^2 + UV = 0.$$

En résolvant cette équation, il vient

$$(24)\qquad m^2 = \frac{AU + BV + E^2 \pm \sqrt{(AU + BV + E^2)^2 - 4AUBV}}{2AB};$$

mais la forme trigonométrique ne conviendra à la solution qu'autant que les deux valeurs de m^2 seront positives. Par une simple transformation de la quantité sous le radical, on exprime la condition de réalité des valeurs de m^2 comme il suit :

$$(25)\qquad (AU - BV)^2 + 2(AU + BV)E^2 + E^4 \geqq 0.$$

Or on reconnaît aisément que, dans les meules horizontales, on a

$$(26)\qquad C - A > 0, \quad C - B > 0:$$

la quantité K (15) étant d'ailleurs positive, U et V sont positifs; ce qui suffit pour satisfaire à la condition précédente. Enfin, les quatre quantités A, U, B, V étant positives et la condition (25) satisfaite. l'équation (23) n'admet pour m^2 que des valeurs positives.

Lorsqu'au lieu d'employer immédiatement la forme trigonométrique, on fait usage d'exponentielles pour intégrer les équations linéaires, on doit considérer successivement les racines positives et négatives de l'équation caractéristique; mais cela est inutile avec les fonctions trigonométriques, car leurs expressions en exponentielles imaginaires comprennent les deux signes positif et négatif des exposants. Nous nous bornerons ainsi à considérer les deux valeurs positives de m. Distinguant ces valeurs par les indices 1 et 2 et affectant des mêmes indices les valeurs correspondantes des constantes arbi-

traires, nous aurons pour intégrales complètes

$$(27)\quad \begin{cases} x'' = \alpha_1 \cos(m_1 t + \varepsilon_1) + \alpha_2 \cos(m_2 t + \varepsilon_2), \\ y'' = i_1 \alpha_1 \sin(m_1 t + \varepsilon_1) + i_2 \alpha_2 \sin(m_2 t + \varepsilon_2); \end{cases}$$

les valeurs de i_1 et i_2 étant celles que donne l'une ou l'autre des expressions (22) de i, en y mettant successivement pour valeur de m celles de m_1 et m_2.

Ces intégrales contiennent les quatre constantes arbitraires α_1, ε_1, α_2, ε_2, qui seront déterminées par les circonstances du mouvement initial [*].

Les équations (18) donnent actuellement, pour valeurs de a'' et b'',

$$(28)\quad \begin{cases} a'' = -\dfrac{Gn^2}{U} + \dfrac{x''}{\lambda}, \\ b'' = -\dfrac{Fn^2}{V} + \dfrac{y''}{\lambda}. \end{cases}$$

Or ces valeurs devant être des quantités du premier ordre de petitesse, il faut non-seulement que les termes $\frac{Gn^2}{U}$ et $\frac{Fn^2}{V}$ soient de cet ordre, mais qu'il en soit ainsi également des constantes α_1 et α_2. La première de ces conditions sera toujours remplie. En effet, K, C — A et C — B étant des quantités positives, les valeurs absolues de $\frac{Gn^2}{U}$ et $\frac{Fn^2}{V}$, quel que soit n, diminuent quand K augmente et s'annulent lorsque K devient infini; d'un autre côté, elle se réduisent respecti-

---

[*] Il y a lieu de considérer le cas où les deux valeurs de m^2 seraient égales et de montrer que, dans ce même cas, la solution fournie par les équations (27) ne tombe pas en défaut, qu'en conséquence il n'est pas nécessaire d'introduire des termes contenant le temps t en dehors des signes trigonométriques.

Lorsque les deux valeurs de m sont égales, il semble au premier abord que l'une ou l'autre expression de i (22) ne doive fournir qu'une seule valeur de cette quantité : les deux valeurs distinctes existent néanmoins, comme on va le voir.

Considérons d'abord le cas où l'on a A = B; il résulte des équations (17) que l'on a en même temps U = V. Or, si l'on multiplie l'une par l'autre les deux expres-

vement à $\frac{G}{C-A}$ et $\frac{F}{C-B}$ lorsque K est égal à zéro. Ces valeurs restent ainsi comprises entre zéro et l'un ou l'autre des deux rapports que nous venons d'écrire; ces rapports sont d'ailleurs de petites quantités, en vertu de la petitesse de F et G relativement à C — A ou C — B. (Nous n'avons pas à examiner le cas singulier où K et n seraient simultanément nuls, ce cas étant étranger au problème actuel.)

---

sions (22) de i, il vient immédiatement $i^2 = 1$, d'où $i = \pm 1$; mais cela n'éclaircit pas la question. Formant la valeur de m^2, on a

$$m^2 = \frac{2AU + E^2 \pm E\sqrt{4AU + E^2}}{2A^2},$$

et le numérateur de la deuxième expression de i devient

$$U - Am^2 = -\frac{E}{2A}\left(E \pm \sqrt{4AU + E^2}\right).$$

Si l'on joint à la relation A = B, la suivante E = 0, les deux valeurs de m^2 sont

$$m^2 = \frac{U}{A},$$

d'où

$$m = \sqrt{\frac{U}{A}};$$

et celle de i, qui prendrait la forme $\frac{0}{0}$ si l'on n'y supprimait pas le facteur E commun à ses deux termes, se réduit à

$$i = \pm\frac{\sqrt{\frac{A}{U}}}{m},$$

valeur qui, en vertu de celle de m, donne la double solution

$$i = \mp 1.$$

A la faveur d'une indétermination apparente, la valeur de i, qui ne semblait susceptible que d'une solution, en acquiert deux distinctes.

On peut s'assurer que les intégrales (27) que l'on forme avec la valeur simple de m et les deux valeurs de i conservent le degré de généralité nécessaire à la détermination des quatre constantes α_1, ε_1, α_2, ε_2, en fonction des valeurs initiales de x'', y'' et de leurs dérivées par rapport au temps.

Le cas de E = 0 répond à $A = B = \frac{1}{2}C$.

Les valeurs de a'' et b'' étant obtenues, on déduira les valeurs de φ et θ par les formules (7)

$$(29)\qquad \begin{cases} \sin\theta\sin\varphi = -a'', \\ \sin\theta\cos\varphi = -b''. \end{cases}$$

Il reste à déterminer l'angle ψ. A cet effet, la troisième équation (8), en y faisant $\cos\theta$ égal à l'unité et remplaçant r par n (11), donne

$$d\psi = d\varphi - ndt;$$

d'où, en intégrant,

$$(30)\qquad \psi = \varphi - (nt + \varkappa),$$

$\varkappa$ désignant la constante.

Par là, on voit que le mouvement du nœud est rétrograde tant que $\frac{d\varphi}{dt} - n$ est une quantité positive; il serait direct dans le cas où cette différence serait une quantité négative.

Enfin il peut être utile de connaître les valeurs des neuf cosinus (4), dont trois a'', b'', c'' viennent d'être déterminés. Or, si l'on fait, dans les équations (7), $\cos\theta = 1$, et que l'on y mette pour $\varphi - \psi$ sa valeur $nt + \varkappa$ que fournit la relation (30), on aura, en vertu des trois dernières équations (7), pour les six autres,

$$(30\ bis)\qquad \begin{cases} a = +\cos(nt + \varkappa), \\ b = -\sin(nt + \varkappa), \\ c = -a''\cos(nt + \varkappa) + b''\sin(nt + \varkappa); \\ a' = +\sin(nt + \varkappa), \\ b' = +\cos(nt + \varkappa), \\ c' = -a''\sin(nt + \varkappa) - b''\cos(nt + \varkappa). \end{cases}$$

La détermination des valeurs des trois angles φ, θ, ψ, que nous venons d'effectuer, suppose connues les six quantités A, B, C, F, G, H, la masse totale M, la distance L de son centre de gravité au point de suspension et les constantes initiales du mouvement de rotation; elle constitue une théorie générale de ce mouvement. Il reste à fair voir

comment un système convenable d'observations peut permettre d'obtenir les valeurs de F et G, qui intéressent particulièrement le problème de l'équilibrage des meules horizontales. Pour y parvenir, nous aurons à examiner de plus près tout ce qui se rapporte à la constitution mécanique de la meule et à présenter la signification géométrique des auxiliaires x'' et y''.

4. *Moments d'inertie et autres constantes.* — Les quantités très-petites F et G sont divisées dans les expressions (28) de a'' et b'' par V et U. Or, comme les valeurs de a'' et b'' sont du premier ordre et que nous ne poussons pas l'approximation au delà, on voit que les termes du premier ordre peuvent être négligés dans le calcul de V et U. De là résulte que le calcul des moments d'inertie d'où dépendent les fonctions U et V, suivant les relations (17), peut lui-même être effectué en faisant abstraction des faibles irrégularités de la figure de la meule et d'un léger défaut d'homogénéité. Par la même raison, on peut négliger la masse métallique sur laquelle porte le point de suspension ou l'anille et les cavités dans lesquelles se meuvent les masses mobiles servant à réaliser l'équilibrage.

Au reste, pour ne pas laisser subsister aucun doute sur l'influence des quantités négligées, en ce qui concerne les propriétés du mouvement de la meule, nous introduirons ultérieurement deux termes correctifs destinés à tenir compte en grande partie de ces quantités.

Dans le calcul suivant, nous considérerons la meule comme un solide homogène compris d'une part entre deux plans parallèles et d'autre part entre deux surfaces cylindriques concentriques. Soient : H la distance des deux plans ou l'épaisseur de la meule, r_0 et r_1 les rayons des cercles directeurs de la surface cylindrique intérieure et de la surface cylindrique extérieure; les expressions des moments d'inertie (2) seront

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} A = B &= M\left[L^2 + \tfrac{1}{12}H^2 + \tfrac{1}{4}(r_1^2 + r_0^2)\right],\\ C &= M\,\tfrac{1}{2}(r_1^2 + r_0^2).\end{aligned}\right.$$

Posons

$$(32)\qquad \mathfrak{R}^2 = \tfrac{1}{2}(r_1^2 + r_0^2),$$

en sorte que $\mathfrak{R}$ désigne le rayon de gyration autour de l'axe des z_1, puis

(33) $$\beta' = \frac{2L^2 + \frac{1}{6}H^2}{\mathfrak{R}^2};$$

les expressions précédentes deviendront

(34) $$\begin{cases} C = M\mathfrak{R}^2, \\ A = B = \frac{1}{2}C(1 + \beta'). \end{cases}$$

De cette dernière, on tire

(35) $$C - A = C - B = \frac{1}{2}C(1 - \beta'),$$

puis

$$A + B - C = C\beta',$$

et l'on a, suivant la première équation (17),

(36) $$E = Cn\beta'.$$

Des expressions (35) on déduit, suivant les autres équations (17),

(37) $$U = V = K + \frac{1}{2}C(1 - \beta')n^2.$$

Soit

(38) $$\alpha' = \frac{2K}{Cn^2},$$

ou, en vertu de la relation (15),

(39) $$\alpha' = 2g\frac{ML}{Cn^2};$$

les valeurs de U et V pourront s'écrire

(40) $$U = V = \frac{1}{2}Cn^2(1 - \beta' + \alpha').$$

Au lieu de calculer m^2 à l'aide de son expression générale (24), il sera plus simple d'introduire immédiatement dans la double expres-

sion (22) de i la conséquence $U = V$ de l'hypothèse $A = B$. On a ainsi

$$i = \frac{Em}{U - Am^2} = \frac{U - Am^2}{Em};$$

d'où, en faisant le produit de ces deux expressions,

(41) $$i^2 = 1,$$

puis

$$Am^2 + iEm = U.$$

On tire de cette dernière, en ayant égard à la précédente,

$$m = \frac{-iE \pm \sqrt{E^2 + 4AU}}{2A}.$$

Ainsi qu'on l'a vu plus haut, nous n'avons à considérer que les valeurs positives de m. Or, A et U étant des quantités positives, le radical sera toujours $> -iE$; nous devons donc n'employer que le signe positif devant ce radical.

Des relations (34) et (40) on déduit

$$4AU = C^2 n^2[1 - \beta'^2 + (1 + \beta')\alpha'];$$

d'où, en vertu de la valeur (36),

$$E^2 + 4AU = C^2 n^2[1 + (1 + \beta')\alpha'].$$

En ayant égard à la même relation et à la deuxième équation (34), on obtient la valeur suivante de m :

(42) $$m = \frac{-in\beta' + \sqrt{n^2}\sqrt{1 + (1 + \beta')\alpha'}}{1 + \beta'}.$$

(Nous écrivons ici $\sqrt{n^2}$ et non simplement n, parce que la constante n peut être positive ou négative.)

Actuellement distinguons par les indices 1 et 2 les deux valeurs

de i et les valeurs correspondantes de m; nous aurons, en vertu de (41),

$$(43)\quad \begin{cases} i_1 = -1, \quad m_1 = \dfrac{+n\beta' + \sqrt{n^2}\sqrt{1+(1+\beta')\alpha'}}{1+\beta'}, \\ i_2 = +1, \quad m_2 = \dfrac{-n\beta' + \sqrt{n^2}\sqrt{1+(1+\beta')\alpha'}}{1+\beta'}. \end{cases}$$

Avec les quantités m_1 et m_2, nous formerons les combinaisons suivantes, dont il sera fait usage plus loin,

$$(44)\quad \begin{cases} \mu = \frac{1}{2}(m_1 + m_2), \\ \nu = \frac{1}{2}(m_1 - m_2), \end{cases}$$

ou

$$(45)\quad \begin{cases} \mu = \dfrac{\sqrt{n^2}}{1+\beta'}\sqrt{1+(1+\beta')\alpha'}, \\ \nu = \dfrac{n\beta'}{1+\beta'}. \end{cases}$$

La valeur de μ peut, en vertu de la valeur (39) de α', s'écrire encore

$$\mu = \frac{\sqrt{n^2 + \dfrac{2g\mathrm{ML}}{\mathrm{C}}(1+\beta')}}{1+\beta'};$$

puis, eu égard à l'expression (34) de C,

$$(46)\ [*]\quad \mu = \frac{\sqrt{n^2 + \dfrac{2g\mathrm{L}}{\mathfrak{R}^2}(1+\beta')}}{1+\beta'}.$$

[*] Si l'on met la valeur de μ sous la forme

$$\mu = \sqrt{n^2\left[1 + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}'}(1+\beta')\right]},$$

en posant

$$\mathrm{H}' = \frac{n^2\mathfrak{R}^2}{2g},$$

la quantité H′ exprimera la hauteur due à la vitesse d'un point situé à l'extrémité du rayon de giration $\mathfrak{R}$; et l'on aura

$$\alpha' = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}'}.$$

Les enfants ont un jouet dont la théorie rentre dans celle de la meule de moulin : ce jouet consiste en un disque cylindrique très-aplati et traversé par une aiguille

Au moyen des valeurs (43) de i_1 et i_2, les formules (27) deviennent

$$(47)\qquad \begin{cases} x'' = +\alpha_1 \cos(m_1 t + \varepsilon_1) + \alpha_2 \cos(m_2 t + \varepsilon_2), \\ y'' = -\alpha_1 \sin(m_1 t + \varepsilon_1) + \alpha_2 \sin(m_2 t + \varepsilon_2). \end{cases}$$

On peut remarquer que, dans le cas de l'égalité des racines m_1 et m_2 de l'équation caractéristique, ces formules ne tombent pas en défaut, comme celaaurait lieu si l'on n'avait à intégrer qu'une seule équation linéaire.

Formons enfin les valeurs de $\frac{n^2}{U}$ et $\frac{n^2}{V}$ qui entrent dans les expressions (28) de a'' et b'' : nous aurons

$$(48)\quad \frac{n^2}{U} = \frac{n^2}{V} = \frac{2n^2}{2K + C(1-\beta')n^2} = \frac{2n^2}{2gML + C(1-\beta')n^2} = \frac{2}{C(1-\beta'+\alpha')}.$$

5. *Influence d'une petite différence entre les moments d'inertie* A *et* B. — Dans ce qui précède, nous avons supposé les moments d'inertie A et B égaux entre eux; d'autres causes que l'irrégularité de la figure de la meule et son défaut d'homogénéité doivent amener une différence entre les valeurs de A et B : ainsi la barre métallique servant de support à la meule ou l'anille, et les cavités plus ou moins remplies qui contiennent les masses mobiles destinées à réaliser l'équilibre dynamique, sont généralement une cause de différence entre les moments d'inertie A et B. On doit toutefois remarquer que si les axes des x_1 et y_1, dont la direction dans le plan qui les contient est arbitraire, sont situés dans des plans méridiens faisant avec l'axe transversal de l'anille un angle de 45 degrés, la différence dont il s'agit disparaîtra, en ce qui concerne l'anille. Il en sera de même pour les

---

dont on peut négliger la masse par rapport à celle du disque; il se distingue d'ailleurs de la meule de moulin, en ce que le centre de gravité est *au-dessus* du centre de rotation. L étant une quantité négative dans cet appareil, la condition pour que μ soit réel, ou pour que l'appareil ne puisse effectuer que de petites oscillations par rapport à la verticale, est donnée par l'inégalité

$$H' > -L(1+\beta').$$

La limite inférieure de la vitesse de rotation n est ainsi déterminée.

cavités supposées égales et également distantes de l'axe de figure de la meule, si leurs axes sont dans les mêmes plans méridiens que les axes des x_1 et y_1. C'est ce que l'on reconnaît sans recourir au calcul.

Nous allons rechercher les corrections que doivent subir les valeurs de i et de m trouvées dans le numéro précédent, pour avoir égard à l'existence d'une petite différence entre B et A, différence que nous désignerons par δB, en posant

$$\delta B = B - A.$$

Les équations (22) d'où se tirent i et m peuvent s'écrire

$$(49)\qquad \begin{cases} i(V - Am^2) = Em, \\ iEm = U - Bm^2. \end{cases}$$

En vertu des équations (17), on a

$$\delta E = n\delta B,\quad \delta U = 0,\quad \delta V = -n^2\delta B.$$

Différentiant les précédentes équations et y substituant les valeurs de δE, δU et δV, on trouve

$$\begin{aligned} (V - Am^2)\delta i - (2Aim + E)\delta m &= +(in^2 + mn)\delta B, \\ Em\delta i + (2Bm + Ei)\delta m &= -(m^2 + imn)\delta B. \end{aligned}$$

Multipliant la première par i, remplaçant B par A et ayant égard à la relation (41) et à la première (49), il vient

$$\begin{aligned} Em\delta i - (2Am + Ei)\delta m &= +(n^2 + imn)\delta B, \\ Em\delta i + (2Am + Ei)\delta m &= -(m^2 + imn)\delta B. \end{aligned}$$

On tire de celles-ci

$$\begin{aligned} 2Em\delta i &= -(m^2 - n^2)\delta B, \\ 2(2Am + Ei)\delta m &= -(m^2 + 2imn + n^2)\delta B, \end{aligned}$$

ou, en vertu des relations (34) et (36),

$$\begin{aligned} 2Cmn\beta'\delta i &= -(m^2 - n^2)\delta B, \\ 2C[m(1 + \beta') + n\beta' i]\delta m &= -(m^2 + 2imn + n^2)\delta B. \end{aligned}$$

Pour simplifier, nous supposerons que la quantité α' (39) est négligeable par rapport à l'unité; cette quantité est petite, parce que L est une petite quantité et n un nombre assez grand dans la question qui nous occupe. Dès lors la valeur (42) se réduit à

$$m = \frac{-in\beta' + \sqrt{n^2}}{1+\beta'},$$

et l'on a

$$Cm\,\delta i = -\frac{n + i\sqrt{n^2}}{(1+\beta')^2}\,\delta B,$$

$$C\sqrt{n^2}\,\delta m = -\frac{1}{2}\frac{(in+\sqrt{n^2})^2}{(1+\beta')^2}\,\delta B = -n\frac{n+i\sqrt{n^2}}{(1+\beta')^2}\,\delta B.$$

Mettant la valeur précédente de m et ayant égard à la relation (34), il vient

$$\delta i = -\frac{1}{2}\frac{i+\dfrac{n}{\sqrt{n^2}}}{1-\dfrac{in}{\sqrt{n^2}}\beta'}\frac{\delta B}{A},$$

$$\delta m = -\frac{1}{2}n\frac{i+\dfrac{n}{\sqrt{n^2}}}{1+\beta'}\frac{\delta B}{A}.$$

Dans l'application de ces formules, on devra donc distinguer les deux cas de n positif et n négatif. En conséquence des relations (43) on aura

$$n \text{ positif} \left\{ \begin{array}{lll} \delta i_1 = 0, & \delta i_2 = -\dfrac{1}{1-\beta'}\dfrac{\delta B}{A}, & \delta\mu = -\dfrac{1}{2}\dfrac{n}{1+\beta'}\dfrac{\delta B}{A}, \\ \delta m_1 = 0, & \delta m_2 = -\dfrac{n}{1+\beta'}\dfrac{\delta B}{A}, & \delta\nu = +\dfrac{1}{2}\dfrac{n}{1+\beta'}\dfrac{\delta B}{A}; \end{array} \right.$$

$$n \text{ négatif} \left\{ \begin{array}{lll} \delta i_1 = +\dfrac{1}{1-\beta'}\dfrac{\delta B}{A}, & \delta i_2 = 0, & \delta\mu = +\dfrac{1}{2}\dfrac{n}{1+\beta'}\dfrac{\delta B}{A}, \\ \delta m_1 = +\dfrac{n}{1+\beta'}\dfrac{\delta B}{A}, & \delta m_2 = 0, & \delta\nu = +\dfrac{1}{2}\dfrac{n}{1+\beta'}\dfrac{\delta B}{A}. \end{array} \right.$$

Nous ferons remarquer que les corrections δi_1 et δi_2 de i_1 et i_2 devant multiplier respectivement α_1 et α_2 dans l'expression (27) de y'', et ces dernières constantes étant assujetties à la condition d'être très-petites du premier ordre, nous devrons négliger les produits $\alpha_1\,\delta i_1$ et

$\alpha_2\,\delta i_2$, puisque nous négligeons les quantités du deuxième ordre; au contraire, il est nécessaire de tenir compte des δm_1 et δm_2, parce que ces quantités entreront en facteurs du temps t. Il suffira ainsi d'appliquer aux valeurs de m_1 et m_2 leurs corrections, dans les expressions (47) de x'' et y''.

Posons

$$(50)\qquad \gamma' = \frac{B - A}{2A};$$

les valeurs corrigées de m_1 et m_2 pourront s'écrire, suivant que n sera positif ou négatif,

$$(51)\quad \begin{cases} m_1 = +n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}+\beta'}{1+\beta'}, & m_2 = +n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}-(\beta'+2\gamma')}{1+\beta'}, \\ \text{ou} & \\ m_1 = -n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}-(\beta'+2\gamma')}{1+\beta'}, & m_2 = -n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}+\beta'}{1+\beta'}. \end{cases}$$

Les valeurs corrigées de μ et ν seront d'ailleurs

$$(52)\quad \begin{cases} n \text{ positif}: & \mu = +\,n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}-\gamma'}{1+\beta'}, & \nu = n\dfrac{\beta'+\gamma'}{1+\beta'}, \\ n \text{ négatif}: & \mu = -\,n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}-\gamma'}{1+\beta'}, & \nu = n\dfrac{\beta'+\gamma'}{1+\beta'}. \end{cases}$$

En réalité, dans ces deux cas, les valeurs de μ sont égales et de mêmes signes, tandis que celles de ν sont égales et de signes contraires. Il résulte de là et de la petitesse supposée de γ', que μ doit être considéré comme essentiellement positif.

Les relations (4) donnent

$$(53)\qquad m_1 = \mu + \nu, \quad m_2 = \mu - \nu;$$

mettant ces valeurs dans les équations (47), il vient

$$(54)\quad \begin{cases} x'' = +\,\alpha_1\cos(\mu t + \nu t + \varepsilon_1) + \alpha_2\cos(\mu t - \nu t + \varepsilon_2), \\ y'' = -\,\alpha_1\sin(\mu t + \nu t + \varepsilon_1) + \alpha_2\sin(\mu t - \nu t + \varepsilon_2). \end{cases}$$

Par les motifs énoncés plus haut, nous nous dispenserons d'appliquer aux valeurs (48), des corrections relatives à la différence B — A.

6. *Calcul plus exact des moments d'inertie.* — C'est uniquement pour moins fatiguer le lecteur que nous n'avons pas immédiatement présenté un calcul des moments d'inertie plus conforme aux circonstances de la pratique. La masse de la meule ne se compose pas d'un simple disque de pierre meulière : pour économiser cette précieuse matière, on donne à la meulière une épaisseur qui ne dépasse guère $0^m,22$, et on lui superpose une couche de plâtre d'environ $0^m,14$; ce qui produit en apparence, une épaisseur totale de $0^m,36$.

Soient : S le centre de rotation de la meule, G son centre de gravité, et, comme plus haut, M sa masse, H son épaisseur, L la distance de G au-dessous de S. Relativement au disque supérieur (plâtre), désignons par m' la masse, h' l'épaisseur, s' la distance de son centre de gravité au point S ; nous désignerons par les mêmes lettres avec deux accents les quantités de même espèce qui se rapportent au disque inférieur (meulière). Enfin, soit s la distance du point S, au-dessous de la surface de séparation des deux disques; nous aurons

$$(55)\qquad \begin{cases} s' = \frac{1}{2}h' + s, \\ s'' = \frac{1}{2}h'' - s. \end{cases}$$

Pour la symétrie des calculs, nous introduirons la différence $m'' - m'$ des masses composantes, que nous désignerons par m, de telle sorte qu'on ait

$$(56)\qquad \begin{cases} \mathrm{M} = m'' + m', \\ m = m'' - m' ; \end{cases}$$

d'où

$$(57)\qquad \begin{cases} m'' = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + m), \\ m' = \frac{1}{2}(\mathrm{M} - m). \end{cases}$$

Si nous prenons les moments des masses par rapport au plan de séparation des deux disques, nous aurons

$$(58)\qquad \mathrm{M}(\mathrm{L} + s) = \tfrac{1}{2}(m''h'' - m'h').$$

En appliquant la première formule (31) au calcul des moments A et B, on aura

$$(59)\quad A = B = m'[s'^2 + \tfrac{1}{12}h'^2 + \tfrac{1}{4}(r_1^2 + r_0^2)] + m''[s''^2 + \tfrac{1}{12}h''^2 + \tfrac{1}{4}(r_1^2 + r_0^2)].$$

Nous introduirons encore la différence h des épaisseurs des deux disques en posant

$$(60)\quad \begin{cases} H = h'' + h', \\ h = h'' - h'; \end{cases}$$

d'où

$$(61)\quad \begin{cases} h'' = \tfrac{1}{2}(H + h), \\ h' = \tfrac{1}{2}(H - h). \end{cases}$$

Au moyen de ces valeurs, la relation (58) devient

$$2M(L + s) = \tfrac{1}{4}(M + m)(H + h) - \tfrac{1}{4}(M - m)(H - h) = \tfrac{1}{2}Mh + \tfrac{1}{2}mH;$$

d'où

$$(62)\quad s = \frac{1}{4}\left(h + \frac{m}{M}H\right) - L.$$

Mettant cette valeur et celles de h'' et h' dans les expressions (55), il viendra

$$s' = \frac{1}{4}H\left(1 + \frac{m}{M}\right) - L,$$

$$s'' = \frac{1}{4}H\left(1 - \frac{m}{M}\right) + L.$$

Ces valeurs, ainsi que celles (57) et (61), étant substituées dans (59), on trouve d'abord

$$A = B = M\left[\frac{1}{16}H^2\left(1 + \frac{m^2}{M^2}\right) - \frac{1}{2}HL\frac{m}{M} + L^2 + \frac{1}{48}(H^2 + h^2) + \frac{1}{4}(r_1^2 + r_0^2)\right]$$
$$+ m\left(-\frac{1}{8}H^2\frac{m}{M} + \frac{1}{2}HL + \frac{1}{24}Hh\right),$$

puis ensuite

$$A = B = M\left[L^2 + \frac{1}{12}H^2 + \frac{1}{4}(r_1^2 + r_0^2) + \frac{1}{48}h^2 + \frac{1}{8}\frac{m}{M}H^2\left(\frac{1}{3}\frac{h}{H} - \frac{1}{2}\frac{m}{M}\right)\right].$$

En comparant cette expression à (31) et ayant égard à la première (34), on voit que la valeur (31) doit recevoir la correction

$$\delta A = \frac{C}{8\mathfrak{R}^2}\left[\frac{1}{6}h^2 + \frac{m}{M}H^2\left(\frac{1}{3}\frac{h}{H} - \frac{1}{2}\frac{m}{M}\right)\right].$$

Or, si l'on conserve entre A et C la relation (34), il faudra appliquer à la valeur de β' qui lui correspond, la correction

$$(63) \qquad \delta\beta' = \frac{1}{4\mathfrak{R}^2}\left[\frac{1}{6}h^2 + \frac{m}{M}H^2\left(\frac{1}{3}\frac{h}{H} - \frac{1}{2}\frac{m}{M}\right)\right].$$

Il est visible, même en l'absence de données exactes sur les densités des matières formant les deux disques, que cette correction est très-petite.

Dans le calcul qui précède, il n'a point été tenu compte de l'irrégularité de figure et du défaut d'homogénéité des deux disques composants; on a négligé également, pour ne pas compliquer les calculs, d'avoir égard à l'existence des armatures métalliques qui servent à consolider la meule. Or, si l'on remarque que les valeurs de m, et par suite celles de μ et ν, dépendent seulement des rapports des moments A et B et de la quantité K au moment C, on reconnaît qu'on tiendra compte de toutes les quantités négligées, en appliquant à α' et β' de petites corrections indéterminées $\delta\alpha'$ et $\delta^2\beta'$. Soient donc

$$(64) \qquad \begin{cases} \alpha' \text{corrigé} = \alpha' + \delta\alpha', \\ \beta' \text{corrigé} = \beta' + \delta\beta' + \delta^2\beta', \end{cases}$$

$\delta\beta'$ étant la quantité calculée par l'équation (63) et α' et β' les valeurs fournies par les formules (38) et (33); les valeurs de m ou de μ et ν pourront être considérées comme exactes.

Nos développements légitiment la forme attribuée à ces constantes dans une première approximation, et ils permettent d'en calculer *à priori* les valeurs numériques avec un degré d'exactitude qu'on se figurera en attribuant aux déterminées $\delta\alpha'$, $\delta^2\beta'$ et γ' des valeurs limites faciles à assigner.

7. *Interprétation géométrique des résultats obtenus.* — Supposons que, la meule étant enlevée, on établisse un style mobile le long d'un axe vertical qui passe par le centre de suspension. D'autre part, imaginons un plan lié au système des axes mobiles et parallèle au plan des x_1, y_1, dont l'ordonnée z_1 soit égale à λ; par exemple, celui de la face supérieure de la meule rendue parallèle à la face inférieure, et recouverte d'une feuille de papier ou de carton mince.

Lorsque la meule sera remise en place et qu'on lui communiquera un mouvement de rotation, le style tracera, sur le papier ou le carton, un diagramme qui va nous fournir une interprétation géométrique très-simple et les éléments très-simples également d'une solution du problème de l'équilibrage.

La face inférieure de la meule étant rendue horizontale, le style marquera la trace de l'axe des z_1 sur le plan considéré. De ce point, que nous désignerons par O', on mènera deux axes rectangulaires, parallèles aux axes mobiles des x_1 et y_1. Ces derniers étant arbitraires, il revient au même de considérer la situation des axes menés par O' comme arbitraire, et celle des x_1, y_1 comme assujettie à leur être parallèle.

Ceci posé, les relations entre les coordonnées x_1, y_1, z_1 rapportées aux axes mobiles, et les coordonnées rapportées aux axes fixes des x, y, z, sont

$$(65)\qquad \begin{cases} x_1 = ax + a'y + a''z, \\ y_1 = bx + b'y + b''z, \\ z_1 = cx + c'y + c''z. \end{cases}$$

Le lieu de l'intersection de l'axe du style avec le plan du diagramme mobile, pendant le mouvement de la meule, s'obtiendra en faisant $z_1 = \lambda$, puis $x = 0$, $z = 0$; or, c'' ne différant de l'unité que de quantités du deuxième ordre, on aura par la troisième équation précédente $\lambda = z_1$, et les deux autres donneront $x_1 = a''\lambda$, $y_1 = b''\lambda$. Pour plus de commodité, nous désignerons les coordonnées de la courbe tracée sur le diagramme par x' et y'; nous aurons ainsi

$$(66)\qquad \begin{cases} x' = a''\lambda, \\ y' = b''\lambda. \end{cases}$$

Posons maintenant

$$(67)\qquad \begin{cases} \xi' = -\lambda\dfrac{Gn^2}{U}, \\ \eta' = -\lambda\dfrac{Fn^2}{V}; \end{cases}$$

les équations (28) nous donneront

$$(68)\qquad \begin{cases} x' = \xi' + x'', \\ y' = \eta' + y''. \end{cases}$$

Il résulte de là que les auxiliaires x'' et y'' sont les coordonnées de la courbe tracée par le style vertical sur le diagramme, rapportées à des axes parallèles aux x_1 et y_1, et ayant leurs points de croisement en un point O″ dont les coordonnées sont ξ' et η'. On doit remarquer que ces coordonnées varieront avec la vitesse; mais, en raison de la nature des quantités U et V qui dépendent aussi de la vitesse (48), ces variations seront insensibles pour les valeurs de n qui sont pratiquées dans les minoteries. Soit ρ' le rayon vecteur qui joint un point de la courbe à l'origine O′; on déduit des relations (29) et (66)

$$(69)\qquad \sin^2\theta = \frac{\rho'^2}{\lambda^2}.$$

Le rayon vecteur ρ' sert ainsi de mesure à l'inclinaison θ de l'axe de la meule par rapport à la verticale. En menant par le point de suspension une droite perpendiculaire au plan vertical qui contient ρ', on a la direction de la ligne des nœuds.

Il nous reste à faire connaître la loi du mouvement suivant lequel est tracée la courbe du diagramme.

8. *Nature de la courbe décrite.* — On déduit des relations (54)

$$(70)\qquad \begin{cases} x''\cos\nu t - y''\sin\nu t = +\alpha_1\cos(\mu t + \varepsilon_1) + \alpha_2\cos(\mu t + \varepsilon_2), \\ x''\sin\nu t + y''\cos\nu t = -\alpha_1\sin(\mu t + \varepsilon_1) + \alpha_2\sin(\mu t + \varepsilon_2). \end{cases}$$

Les seconds membres de ces équations, étant développés, deviennent

respectivement

$$+(\alpha_1 \cos\varepsilon_1 + \alpha_2 \cos\varepsilon_2)\cos\mu t - (\alpha_1 \sin\varepsilon_1 + \alpha_2 \sin\varepsilon_2)\sin\mu t,$$
$$-(\alpha_1 \sin\varepsilon_1 - \alpha_2 \sin\varepsilon_2)\cos\mu t - (\alpha_1 \cos\varepsilon_1 - \alpha_2 \cos\varepsilon_2)\sin\mu t;$$

si donc on pose

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{R}\cos\Pi &= \alpha_1 \cos\varepsilon_1 + \alpha_2 \cos\varepsilon_2,\\ \mathrm{R}\sin\Pi &= \alpha_1 \sin\varepsilon_1 + \alpha_2 \sin\varepsilon_2,\\ -\rho\cos\varpi &= \alpha_1 \cos\varepsilon_1 - \alpha_2 \cos\varepsilon_2,\\ -\rho\sin\varpi &= \alpha_1 \sin\varepsilon_1 - \alpha_2 \sin\varepsilon_2, \end{aligned}\right.$$

les équations (70) donneront

$$\frac{1}{\mathrm{R}}(x''\cos\nu t - y''\sin\nu t) = \cos\Pi\cos\mu t - \sin\Pi\sin\mu t,$$
$$\frac{1}{\rho}(x''\sin\nu t + y''\cos\nu t) = \sin\varpi\cos\mu t + \cos\varpi\sin\mu t,$$

et les quatre constantes α_1, ε_1, α_2, ε_2, seront remplacées par les quatre nouvelles constantes R, Π, ρ et ϖ. On déduit aisément de ces équations

$$x''\left(\frac{1}{\rho}\cos\Pi\sin\nu t - \frac{1}{\mathrm{R}}\sin\varpi\cos\nu t\right) + y''\left(\frac{1}{\rho}\cos\Pi\cos\nu t + \frac{1}{\mathrm{R}}\sin\varpi\sin\nu t\right)$$
$$= \cos(\Pi - \varpi)\sin\mu t,$$
$$y''\left(\frac{1}{\rho}\sin\Pi\sin\nu t + \frac{1}{\mathrm{R}}\cos\varpi\cos\nu t\right) + y''\left(\frac{1}{\rho}\sin\Pi\cos\nu t - \frac{1}{\mathrm{R}}\cos\varpi\sin\nu t\right)$$
$$= \cos(\Pi - \varpi)\cos\mu t.$$

En élevant les deux membres au carré et ajoutant, on éliminera μt; après quelques réductions, il viendra

$$x''^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right) + \frac{1}{\rho\mathrm{R}}\sin(\Pi - \varpi)\sin 2\nu t - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\cos 2\nu t\right]$$
$$+ y''^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right) - \frac{1}{\rho\mathrm{R}}\sin(\Pi - \varpi)\sin 2\nu t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\cos 2\nu t\right]$$
$$+ 2x''y''\left[\frac{1}{\rho\mathrm{R}}\sin(\Pi - \varpi)\cos 2\nu t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\sin 2\nu t\right]$$
$$= \cos^2(\Pi - \varpi).$$

Soient, pour abréger,

$$(72)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{1}{\rho R}\sin(\Pi - \varpi)\sin 2\nu t - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{R^2}\right)\cos 2\nu t, \\ v = \dfrac{1}{\rho R}\sin(\Pi - \varpi)\cos 2\nu t + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{R^2}\right)\sin 2\nu t, \\ S = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{R^2}\right); \end{cases}$$

l'équation précédente deviendra

$$(73)\qquad x''^2(S + u) + y''^2(S - u) + 2x''y''v = \cos^2(\Pi - \varpi).$$

Si l'on fait abstraction un instant des variations de u et v, on pourra considérer le lieu géométrique des points (x'', y'') comme appartenant à une section conique dont le centre est à l'origine de ces mêmes coordonnées, puisque l'équation (73) est privée de termes impairs. En ayant égard aux variations de u et v, on pourra encore regarder la trajectoire comme une section conique ayant son centre à l'origine des coordonnées (x'', y''), mais dont les axes pourront varier soit en grandeur soit en direction. Déterminons actuellement la direction et la grandeur des axes. A cet effet, soient : x et y [*] les coordonnées rapportées à un nouveau système d'axes de même origine que celui des x'', y''; ε l'angle de l'axe des x avec celui des x'', compté vers y''; nous aurons, entre les deux systèmes de coordonnées, les relations

$$(74)\qquad \begin{cases} x'' = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, \\ y'' = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon; \end{cases}$$

on en déduit

$$(75)\qquad \begin{cases} x''^2 + y''^2 = x^2 + y^2, \\ x''^2 - y''^2 = (x^2 - y^2)\cos 2\varepsilon - 2xy\sin 2\varepsilon, \\ 2x''y'' = (x^2 - y^2)\sin 2\varepsilon + 2xy\cos 2\varepsilon. \end{cases}$$

---

[*] Ne pas confondre ces nouvelles coordonnées avec les x et y qui figurent dans les équations (65) : nous devons faire la même remarque à l'égard d'autres lettres employées dans ce numéro avec des significations différentes de celles présentées au commencement de ce Mémoire.

Substituant ces valeurs dans l'equation (73), il vient

$$(76)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+y^2)S+(x^2-y^2)(u\cos 2\varepsilon+v\sin 2\varepsilon)-2xy(u\sin 2\varepsilon-v\cos 2\varepsilon) \\ &\quad =\cos^2(\Pi-\varpi). \end{aligned} \right.$$

Pour que l'axe des x devienne un des axes de la courbe, il faut que le rectangle xy disparaisse. A cet effet, soit Z le coefficient de x^2-y^2, nous aurons les deux relations

$$(77)\qquad \left\{ \begin{aligned} Z &= u\cos 2\varepsilon + v\sin 2\varepsilon, \\ 0 &= u\sin 2\varepsilon - v\cos 2\varepsilon; \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit, en élevant au carré et ajoutant membre à membre,

$$(78)\qquad Z^2 = u^2 + v^2.$$

En conséquence, l'équation (76) devient

$$(79)\qquad x^2(S+Z)+y^2(S-Z)=\cos^2(\Pi-\varpi).$$

D'autre part, l'équation (78) donne, en ayant égard aux deux premières équations (72),

$$(80)\qquad Z^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{R^2}\right)^2+\frac{1}{\rho^2R^2}\sin^2(\Pi-\varpi),$$

et l'on a, par la troisième équation (72),

$$(81)\qquad S^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{R^2}\right)^2:$$

de celles-ci on tire

$$S^2-Z^2=\frac{1}{\rho^2R^2}-\frac{1}{\rho^2R^2}\sin^2(\Pi-\varpi)$$

ou

$$(82)\qquad (S-Z)(S-Z)=\frac{1}{\rho^2R^2}\cos^2(\Pi-\varpi).$$

Cette relation montre que les facteurs $S+Z$ et $S-Z$ sont de même

signe; comme d'ailleurs le second membre de l'équation (79) est positif, il en résulte que ces facteurs sont également positifs : la trajectoire est par conséquent une ellipse dont les demi-axes parallèles aux x et y sont respectivement

$$(83)\qquad \sqrt{\frac{\cos^2(\Pi-\varpi)}{S+Z}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{\cos^2(\Pi-\varpi)}{S-Z}}.$$

Les valeurs de Z^2 et S^2 (80) et (81) étant des quantités constantes, il s'ensuit que les demi-axes de l'ellipse mobile conservent des grandeurs invariables, dépendant uniquement des constantes du mouvement initial.

9. *Mouvement des axes de l'ellipse mobile.* — Substituons dans les équations (77) les valeurs (72) de u et v, nous aurons

$$(84)\qquad \begin{cases} Z = +\dfrac{1}{\rho R}\sin(\Pi-\varpi)\sin 2(\nu t+\varepsilon) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho^2}-\dfrac{1}{R^2}\right)\cos 2(\nu t+\varepsilon), \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho R}\sin(\Pi-\varpi)\cos 2(\nu t+\varepsilon) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho^2}-\dfrac{1}{R^2}\right)\sin 2(\nu t+\varepsilon); \end{cases}$$

de la seconde de ces équations, on tire

$$(85)\qquad \operatorname{tang} 2(\nu t+\varepsilon) = -\frac{2\sin(\Pi-\varpi)}{\left(\dfrac{R}{\rho}-\dfrac{\rho}{R}\right)}.$$

L'ambiguité que présente la valeur de $2(\nu t+\varepsilon)$ a pour conséquence d'attribuer à cet angle deux valeurs qui diffèrent de 180 degrés; ε prend en conséquence deux valeurs qui diffèrent de 90 degrés : mais le résultat de cette ambiguité est simplement la permutation des axes x et y l'un dans l'autre, sans que les positions des divers points de la trajectoire en soient affectées.

Il est à remarquer que la valeur de l'angle $\nu t+\varepsilon$ que l'on tire de l'équation (85) est une constante. Soit ε_0 la valeur de cette constante; on aura

$$(86)\qquad \varepsilon = \varepsilon_0 - \nu t,$$

et

(87) $$Z = \frac{1}{\rho R}\sin(\Pi - \varpi)\sin 2\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}\right)\cos 2\varepsilon_0.$$

La relation (86) montre que les axes de l'ellipse tournent d'un mouvement uniforme autour de l'origine O″. En se reportant à la valeur (52) de ν et observant que β' et γ' sont des fractions peu considérables de l'unité, on reconnaîtra que le déplacement des axes mobiles est faible par rapport au mouvement de rotation n; si l'on suppose, comme cela est admissible, la somme $\beta' + \gamma'$ positive, le mouvement des axes sera rétrograde ou direct, suivant que le signe de n sera positif ou négatif.

La valeur de la constante ε_0 et celles des axes peuvent s'exprimer très-simplement au moyen des constantes primitives α_1, ε_2, α_2, ε_2. En effet, on tire des équations (71) les relations suivantes :

$$R^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1),$$
$$\rho^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1);$$

d'où

(88) $$\left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(R^2 + \rho^2) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2,\\ &\tfrac{1}{2}(R^2 - \rho^2) = 2\alpha_1\alpha_2\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1);\end{aligned}\right.$$

puis

$$-\rho R\cos\Pi\cos\varpi = \alpha_1^2\cos^2\varepsilon_1 - \alpha_2^2\cos^2\varepsilon_2,$$
$$-\rho R\sin\Pi\sin\varpi = \alpha_1^2\sin^2\varepsilon_1 - \alpha_2^2\sin^2\varepsilon_2,$$
$$-\rho R\sin\Pi\cos\varpi = \alpha_1^2\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_1 - \alpha_2^2\sin\varepsilon_2\cos\varepsilon_2 + \alpha_1\alpha_2\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1),$$
$$-\rho R\cos\Pi\sin\varpi = \alpha_1^2\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_1 - \alpha_2^2\sin\varepsilon_2\cos\varepsilon_2 - \alpha_1\alpha_2\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1);$$

de ces relations on déduit

(89) $$\left\{\begin{aligned} &-\rho R\cos(\Pi - \varpi) = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2),\\ &-\rho R\sin(\Pi - \varpi) = 2\alpha_1\alpha_2\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1).\end{aligned}\right.$$

Multipliant haut et bas par $\frac{1}{2}\rho R$ le deuxième membre de l'équa-

tion (85), on le trouve, en vertu des relations (88) et (89), égal à $\tang(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$; on a donc

$$2\varepsilon_0 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1. \tag{90}$$

La valeur (87) de Z donne, en vertu des mêmes relations,

$$\rho^2 R^2 Z = -2\alpha_1 \alpha_2 [\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin 2\varepsilon_0 + \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos 2\varepsilon_0],$$

ou, en ayant égard à (90),

$$\rho^2 R^2 Z = -2\alpha_1 \alpha_2. \tag{91}$$

De la troisième équation (72) et la première équation (88), on tire

$$\rho^2 R^2 S = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Les deux équations que nous venons d'écrire donnent

$$\rho^2 R^2 (S + Z) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2,$$
$$\rho^2 R^2 (S - Z) = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 :$$

on a d'ailleurs (89)

$$\rho^2 R^2 \cos^2(\Pi - \varpi) = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2.$$

Au moyen de ces relations, les valeurs des demi-axes respectivement parallèles aux x et y deviennent

$$\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}. \tag{92}$$

Les formules (90) et (92) remplacent avantageusement celles données sous les nos (85) et (83).

Soit T la durée de la révolution des axes de l'ellipse, on déduit de la formule (86)

$$T = \pm \frac{2\pi}{\nu}: \tag{93}$$

or, si l'on désigne par Θ la durée de la révolution de la meule autour

de son axe de figure, on aura

$$\Theta = \pm \frac{2\pi}{n}: \tag{94}$$

d'où

$$\frac{T}{\Theta} = \pm \frac{n}{\nu}. \tag{95}$$

10. *Mouvement sur l'ellipse mobile.* — Les coordonnées x et y ont, en fonction des x'' et y'', les expressions suivantes, qui sont les inverses des relations (74) :

$$x = + x'' \cos\varepsilon + y'' \sin\varepsilon,$$
$$y = - x'' \sin\varepsilon + y'' \cos\varepsilon.$$

En y mettant les valeurs (54) de x'' et y''; il vient

$$x = + \alpha_1 \cos(\mu t + \nu t + \varepsilon_1 + \varepsilon) + \alpha_2 \cos(\mu t - \nu t + \varepsilon_2 - \varepsilon),$$
$$y = - \alpha_1 \sin(\mu t + \nu t + \varepsilon_1 + \varepsilon) + \alpha_2 \sin(\mu t - \nu t + \varepsilon_2 - \varepsilon),$$

ou, en vertu de (86),

$$\left\{ \begin{aligned} x &= + \alpha_1 \cos(\mu t + \varepsilon_1 + \varepsilon_0) + \alpha_2 \cos(\mu t + \varepsilon_2 - \varepsilon_0), \\ y &= - \alpha_1 \sin(\mu t + \varepsilon_1 + \varepsilon_0) + \alpha_2 \sin(\mu t + \varepsilon_2 - \varepsilon_0). \end{aligned} \right. \tag{96}$$

Ces formules permettent d'obtenir x et y en fonction de t, et elles résolvent la question proposée; mais elles ne laissent pas apercevoir la loi très-simple du mouvement du rayon vecteur mené du centre de l'ellipse mobile à sa circonférence. Calculons l'aire $d\eta$ décrite par ce rayon vecteur dans le temps infiniment petit dt; son expression est

$$d\eta = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx), \tag{97}$$

accroissement considéré comme positif, lorsque le rayon vecteur tourne dans le sens de x à y. Or nous tirons des équations (96)

$$-\frac{dx}{dt} = + \mu[\alpha_1 \sin(\mu t + \varepsilon_1 + \varepsilon_0) + \alpha_2 \sin(\mu t + \varepsilon_2 - \varepsilon_0)],$$

$$+\frac{dy}{dt} = - \mu[\alpha_1 \cos(\mu t + \varepsilon_1 + \varepsilon_0) - \alpha_2 \cos(\mu t + \varepsilon_2 - \varepsilon_0)];$$

substituant ces valeurs et celles (96) dans (97), il vient simplement

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2}\mu(\alpha_2^2 - \alpha_1^2). \tag{98}$$

On en conclut que le rayon vecteur décrit, dans l'ellipse mobile, des aires proportionnelles aux temps, lesquelles dépendent seulement de la constante μ et des constantes α_1 et α_2 du mouvement initial : le sens du mouvement dépend du signe de la différence $(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$; nous avons vu en effet, n° 5, que μ est une quantité essentiellement positive.

Soit Υ l'aire de l'ellipse; on aura, en vertu des valeurs (92) des demi-axes,

$$\Upsilon = \pi\sqrt{(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^2}, \tag{99}$$

et la constante des aires deviendra

$$\frac{d\eta}{dt} = \pm\frac{1}{2}\frac{\mu}{\pi}\Upsilon,$$

expression dans laquelle on devra prendre le signe de $(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$. On en conclut, pour la durée τ d'une révolution du rayon vecteur par rapport aux axes mobiles,

$$\tau = \pm\frac{2\pi}{\mu}: \tag{100}$$

en comparant cette durée à celle (94) d'un tour de la meule, on trouve

$$\frac{\tau}{\Theta} = \pm\frac{n}{\mu}. \tag{101}$$

Si l'on se reporte aux valeurs (52) de μ, si l'on se rappelle que β', α' et γ' sont de petites fractions de l'unité, on reconnaît que les durées τ et Θ seront peu différentes.

ÉQUILIBRAGE DE LA MEULE.

11. *Première méthode.* — Dans les numéros qui précèdent, il a été établi que la courbe tracée par le style vertical passant par le point de

suspension peut être considérée comme un ellipse dont les axes tournent autour de son centre, d'un mouvement lent par rapport au mouvement de rotation de la meule, tout en conservant leurs dimensions. Ces dimensions dépendent uniquement des constantes initiales du mouvement. Quant à la loi du mouvement sur le contour de l'ellipse mobile, il est tel que les aires décrites par les rayons vecteurs menés du centre de l'ellipse et comptées des axes mobiles sont proportionnelles aux temps.

La courbe tracée en réalité sur le diagramme se trouve dès lors comprise entre les deux circonférences de cercle concentriques, dont les rayons sont égaux respectivement au demi-grand axe et au demi-petit axe de l'ellipse. Ces deux circonférences servent, pour ainsi dire, d'enveloppes extérieure et intérieure à la courbe tracée. La courbe se réduirait à un cercle dans le cas particulier où les deux axes de l'ellipse se trouveraient égaux. Cette circonstance répond au cas où l'une des deux constantes α_1 et α_2 serait nulle. Signalons encore deux cas particuliers : si les valeurs de ces constantes sont égales, la courbe dégénérera en une ligne droite qui n'en aura pas moins pour enveloppe une circonférence de rayon égal à la valeur commune des mêmes constantes; enfin, si ces deux constantes sont simultanément nulles, la courbe se réduira à un point qui coïncidera avec le point O''.

Il sera facile, dans tous les cas, de fixer sur le diagramme le centre des deux cercles-enveloppes, ou celui du cercle unique si les deux enveloppes se confondent.

Les coordonnées du centre commun de ces diverses trajectoires ont été désignées par ξ' et η'. Les axes des x_1 et y_1, auxquels elles sont parallèles, ont pour origine la trace du style faite sur le diagramme lorsque la face inférieure de la meule est rendue horizontale.

Nous supposerons que les centres de gravité des masses réglantes ne puissent se mouvoir que dans le sens perpendiculaire à la face inférieure de la meule, ou parallèlement à l'axe des z_1.

Soient m_1, m_2 ces deux masses réglantes; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 les coordonnées de leurs centres de gravité.

Désignons par F_0 et G_0 l'ensemble des termes de F et G, à l'exception de ceux correspondant aux masses m_1 et m_2; nous aurons, suivant

les équations (2),

$$F = F_0 + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2,$$
$$G = G_0 + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2,$$

et les variations de ces quantités, dues aux déplacements des deux masses dans le sens parallèle à l'axe des z_1, seront

$$\delta F = m_1 y_1 \delta z_1 + m_2 y_2 \delta z_2,$$
$$\delta G = m_1 x_1 \delta z_1 + m_2 x_2 \delta z_2.$$

On se rappelle que les conditions à remplir pour l'équilibrage sont que les valeurs de F et G, modifiées au besoin, s'annulent. Après le déplacement des masses, ces valeurs deviennent $F + \delta F$, $G + \delta G$; on doit donc satisfaire aux conditions

$$(102) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F + \delta F = 0, \\ G + \delta G = 0. \end{array} \right.$$

De ces équations jointes aux précédentes, on tire

$$(103) \qquad \left\{ \begin{array}{l} m_1 (y_2 x_1 - y_1 x_2) \delta z_1 = + x_2 F - y_2 G, \\ m_2 (y_2 x_1 - y_1 x_2) \delta z_2 = - x_1 F + y_1 G; \end{array} \right.$$

or, en vertu des équations (67),

$$F = -\frac{V}{n^2} \frac{\eta'}{\lambda},$$
$$G = -\frac{U}{n^2} \frac{\xi'}{\lambda}:$$

on a d'ailleurs, suivant les équations (48),

$$\frac{U}{n^2} = \frac{V}{n^2} = \tfrac{1}{2} C(1 - \beta') + \frac{g ML}{n^2},$$

les valeurs de C et β' étant censées calculées par les formules (31) et (33). Si donc on pose

$$(104) \qquad \upsilon = \frac{\tfrac{1}{2} C(1 - \beta') + \dfrac{g ML}{n^2}}{\lambda (y_2 x_1 - y_1 x_2)},$$

on aura finalement

$$(105)\qquad \begin{cases} m_1\,\delta z_1 = \upsilon(y_2\,\xi' - x_2\,\eta'), \\ m_2\,\delta z_2 = \upsilon(x_1\,\eta' - y_1\,\xi'); \end{cases}$$

d'où l'on tirera δz_1 et δz_2.

Nous n'avons pas spécifié le sens dans lequel l'axe des y_1 est dirigé relativement à celui des x_1. Ce sens est effectivement indifférent dans la question actuelle ; car si l'on change le sens des y_1, les trois ordonnées y_1, y_2 et η' changeront de signe, et les valeurs de δz_1 et δz_2 n'en seront nullement affectées.

La valeur de υ sera d'autant mieux déterminée, que la distance λ du point de suspension au plan du diagramme sera plus considérable : on pourrait, au besoin, établir le plan du diagramme à une distance plus grande que nous ne l'avons supposé, en faisant usage d'un châssis très-léger et très-régulier qui serait fixé à la meule bien concentriquement à son axe; mais il nous semble que cela ne sera pas nécessaire, attendu que la position du centre de l'ellipse mobile pourra être relevée à quelques dixièmes de millimètre près, et que cette erreur, agrandie dans le rapport du rayon extérieur de la meule à la quantité λ, sera encore négligeable dans la pratique.

Au même point de vue, il convient de choisir la position des masses m_1 et m_2, de manière que la quantité $y_2 x_1 - y_1 x_2$ soit la plus grande possible. Or cette quantité est égale au double de la surface d'un triangle dont les sommets sont, l'un à l'origine des coordonnées, et les deux autres aux points où les centres de gravité des masses m_1 et m_2 se projettent sur le plan des $x_1 y_1$; il faudra donc que les rayons vecteurs de ces points soient aussi grands que possible : en les supposant égaux, la surface du triangle sera un maximum, lorsque les directions de ces rayons vecteurs seront rectangulaires. Les formules (104) et (105) se simplifieraient si les masses réglantes pouvaient être disposées, l'une dans le plan méridien qui contient l'axe des x_1, l'autre dans celui qui passe par l'axe des y_1; mais la détermination de l'origine des coordonnées résultant d'une opération postérieure à celle de la mise en place des masses m_1 et m_2, il serait difficile de satisfaire exactement à cette condition.

On pourra remarquer que, les masses m_1 et m_2 ayant la forme de disques cylindriques, leur déplacement parallèlement à l'axe des z_1 n'affectera pas le moment d'inertie C, mais que les deux autres moments A et B subiront une légère variation à la suite de ce déplacement; il en sera de même de leur différence et du rapport de A à C; mais nous avons fait voir, n°s 5 et 6, que ces variations se traduisent par des valeurs particulières et très-petites de γ' et de β', qui portent seulement sur les quantités μ et ν, dont ξ' et η' sont indépendants : il n'y a donc pas lieu de se préoccuper de cette circonstance.

La valeur de ν dépend de n, tant que n n'est pas suffisamment grand pour que le second terme du numérateur de υ soit négligeable par rapport au premier. Il conviendra donc, si ce second terme est sensible, d'éviter dans l'expérimentation le décroissement de la vitesse; autrement on s'exposerait à un changement de position du centre de l'ellipse mobile durant l'expérience. Toutefois, comme on ne peut maintenir la vitesse qu'en faisant agir des forces qui pourraient troubler les résultats, il sera toujours préférable d'avoir recours à une réduction de la distance L du centre de gravité au centre de suspension, et de produire à l'origine la plus grande vitesse de rotation possible; alors la diminution de la vitesse pourra avoir lieu sans inconvénient, au moins jusqu'à une certaine limite facile à déterminer.

La petitesse de ξ' et η' n'exige pas que le calcul de υ soit fait avec une grande exactitude; nous l'avons déjà dit sous une autre forme : nous croyons devoir le répéter en terminant, et rappeler, en conséquence, que les valeurs de M, C et β' pourront être calculées comme si la meule était homogène et de forme régulière. Les formules pour ces deux dernières sont (31), (32) et (33).

12. *Résumé de la première méthode.* — La surface inférieure de la meule est considérée comme plane. Dans son épaisseur ont été pratiquées deux cavités cylindriques dont les axes sont perpendiculaires à la face inférieure. Ces axes doivent être situés le plus près possible de la périphérie de la meule et à des distances égales de l'axe; les plans méridiens qui les contiennent sont à peu près rectangulaires et orientés à 45 degres par rapport à l'axe transversal de l'anille. Les deux cavités reçoivent les masses réglantes; ces masses, de forme cylindrique, ne

peuvent être déplacées que suivant des directions perpendiculaires à la surface plane de la meule.

Un style dont l'axe est vertical est établi au-dessus du fer de meule, de manière que sa pointe puisse arriver à coïncider avec le centre de suspension de la meule. Celle-ci, étant mise en place, est équilibrée statiquement, ou de manière qu'étant au repos, sa face inférieure soit horizontale. Un carton ayant été ensuite fixé à la meule dans une situation parallèle à la face inférieure de celle-ci, on abaisse le style sur le carton, et le point de rencontre est pris pour origine de deux axes de coordonnées rectangulaires. Il convient d'orienter ces axes à peu près dans les mêmes plans méridiens que les centres de gravité des masses réglantes.

La meule étant mise en mouvement avec la plus grande vitesse possible et sous la condition d'éviter des oscillations d'une amplitude trop prononcée, le style trace un diagramme qui figure une courbe comprise entre deux circonférences de cercle concentriques. Cette courbe résulte du mouvement sur une ellipse dont les axes constants, et dépendant seulement des circonstances du mouvement initial, tournent avec une vitesse uniforme autour de son centre, vitesse d'ailleurs très-petite relativement à la vitesse de rotation de la meule. Suivant les circonstances que présenteront les oscillations initiales, il pourra arriver que la courbe se réduise à un cercle unique, ou bien que la circonférence intérieure se réduise à un point, et par conséquent disparaisse, ou encore que la courbe elle-même se réduise à un point unique.

Si le mouvement angulaire des axes de l'ellipse mobile est nul, la courbe du diagramme se réduira à une ellipse qui pourra elle-même se réduire à un cercle, à une ligne droite ou à un point, selon les circonstances du mouvement initial.

Quel que soit le résultat qui se produise, on relèvera avec soin la position du centre commun des cercles qui enveloppent la courbe tracée, ou, suivant les cas, celle du centre de l'ellipse ou du cercle unique, celle du milieu de la droite, ou du point unique.

Nous désignons par ξ' et η' les coordonnées du point obtenu, respectivement parallèles aux x_1 et y_1.

En reproduisant les formules nécessaires au calcul des déplacements des masses réglantes, nous substituerons, pour la facilité des applications, les poids aux masses, et nous formerons, par voie d'élimination, les expressions des inconnues, en fonctions le plus explicites possible des données de la question.

Nous prendrons pour unités de temps, de longueur et de poids, respectivement la seconde de temps moyen, le mètre et le kilogramme.

N désignant le nombre de tours que la meule fait par seconde et π le rapport de la circonférence au diamètre, on calculera

$$[1] \qquad n = 2\pi N.$$

Désignons par ϖ le poids du mètre cube de la matière de la meule supposée homogène, r_0 et r_1 ses rayons intérieur et extérieur, H son épaisseur; le poids de la meule est

$$[2] \qquad P = \varpi\pi(r_1^2 - r_0^2)H.$$

Soient : L la distance du centre de gravité de la meule à son centre de suspension, et prise positivement quand le centre de gravité est au-dessous du centre de suspension; λ la distance du plan du diagramme à ce même centre de suspension, et supposée positive lorsque le diagramme est au-dessus dudit centre; p_1 et p_2 les poids des masses réglantes qu'il sera préférable de déterminer par des pesées plutôt que par un calcul; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 les coordonnées des centres de gravité de ces masses (les ordonnées z_1 et z_2 étant comptées du plan parallèle à la face inférieure de la meule qui passe par le centre de suspension et prises positivement du côté du zénith); ∂z_1 et ∂z_2 les variations des coordonnées z_1 et z_2, qui doivent être réalisées pour obtenir l'équilibre dynamique de la meule; g l'accélération de la chute des graves. On calculera

$$[3] \qquad v' = P\frac{\frac{1}{2}(r_1^2 + r_0^2) - (2L^2 + \frac{1}{6}H^2) + \frac{2gL}{n^2}}{2\lambda(y_2 x_1 - y_1 x_2)},$$

et l'on aura

$$[4] \qquad \left\{\begin{aligned} \partial z_1 &= v'\frac{y_2\xi' - x_2\eta'}{p_1}, \\ \partial z_2 &= v'\frac{x_1\eta' - y_1\xi'}{p_2}. \end{aligned}\right.$$

Si les valeurs trouvées par ces deux dernières formules excèdent les limites réalisables, il faudra augmenter les masses réglantes en s'astreignant toujours à la condition préalable de l'équilibre statique.

Si, malgré les précautions prises pour éviter, à l'origine, les grandes oscillations par rapport à la verticale, celles-ci persistent, l'emploi des formules précédentes ne sera plus légitime, mais il sera cependant utile, en ce sens qu'on pourra considérer le résultat obtenu comme une approximation. En effectuant les corrections fournies par le calcul, on pourra toujours compter sur la possibilité de réduire l'amplitude des oscillations au degré voulu, et, en recommençant l'opération, on déduira finalement, d'un nouveau calcul, des corrections qui assureront un équilibre suffisamment complet.

Terminons en rappelant qu'il convient, dans les opérations, de laisser la meule libre, après qu'on lui aura communiqué la vitesse de rotation n, et qu'il faudra éviter de prolonger leur durée au delà du moment où, par suite de la diminution de vitesse résultant des résistances, celle-ci serait affaiblie au point où le dernier terme du numérateur de v' cesserait d'être négligeable par rapport à l'ensemble des deux premiers; autrement, la position du point $(\xi'\eta')$ cesserait d'être invariable.

15. *Remarques concernant la pratique.* — La méthode qui vient d'être exposée présentera sans doute quelque difficulté dans les applications, à cause de la valeur de λ, qui sera peu considérable si le plan du diagramme est celui de la surface supérieure de la meule. On ne peut guère songer à lui en substituer un autre; car, le plan du diagramme devant être fixe par rapport à la meule, il faudrait, pour pouvoir employer de grandes valeurs de λ, rattacher le diagramme à la meule par un châssis métallique bien régulièrement construit et centré; ce qui ne se ferait pas sans difficulté. Si l'on applique le diagramme sur la surface supérieure de la meule, les dimensions absolues de la trajectoire seront très-restreintes, et il faudra relever les coordonnées ξ' et η' au moyen d'un microscope micrométrique. Dans l'hypothèse où l'on aurait recours à ce moyen de mesure, voici les précautions qu'il faudrait prendre. Comme on ne pourrait espérer obtenir directement une coïncidence suffisamment exacte entre l'axe du style et le point de

suspension de la meule, il faudrait placer la meule en équilibre statique, dans quatre positions rectangulaires par exemple, et chaque fois abaisser le style de manière à marquer, sur le diagramme, quatre points bien distincts, qui ne coïncideront généralement pas, puisque nous supposons le centrage du style imparfaitement réalisé. Il est clair que la position du style bien centré serait à l'intersection des diagonales du carré formé par les quatre points. Sur le diagramme, on tracerait des droites rectangulaires dans les directions, ou à peu près, des plans méridiens correspondants aux masses réglantes. Ces droites, ayant particulièrement pour objet l'orientation des fils ou des traits du micromètre, devraient se croiser très-près du centre du carré; mais on éviterait d'en effectuer le tracé dans la région de la trajectoire. La meule, étant mise en mouvement, tracera une courbe un peu différente de celle qui répond au centrage exact du style. Chacun des points de la nouvelle courbe s'obtiendrait, au moyen des points de l'autre courbe, par un simple transport dans la direction du rayon d'excentricité et égal à ce rayon; or, la direction de ce même rayon changeant à chaque instant et faisant un tour sur le diagramme en sens contraire de la rotation de la meule par tour de celle-ci, la nouvelle courbe ne résultera pas d'un simple transport de l'autre : elle sera bien plus compliquée; mais on reconnaît aisément qu'elle sera généralement comprise entre deux cercles-enveloppes, l'un extérieur, l'autre intérieur, dont les rayons excéderont ceux de la courbe décrite dans le numéro précédent, d'une quantité égale à $\pm$ le rayon d'excentricité, en sorte que la position du centre commun des deux enveloppes n'en sera pas affectée. Si donc on mesure au microscope les coordonnées extrêmes de l'une ou de l'autre enveloppe, et qu'on en prenne les moyennes; si l'on prend également les moyennes respectives des coordonnées des quatre points distincts marqués par le style, quand la meule est en équilibre (ces diverses mesures étant comptées des droites rectangulaires tracées sur le diagramme), les excès des premières mesures sur les secondes fourniront les valeurs des coordonnées ξ' et η' du centre des courbes. On aura sans doute remarqué qu'à la suite de la diminution du rayon du cercle-enveloppe intérieur, celui-ci pourra cesser d'avoir une existence réelle, mais le cercle-enveloppe extérieur ne disparaîtra pas, ce qui suffit. Dans le cas actuel, la verticalité exacte du style ne sera pas nécessaire,

attendu que, son déplacement vertical étant une quantité du deuxième ordre, un léger défaut de verticalité ne pourrait produire, dans la mesure des coordonnées, que des erreurs du troisième ordre. Une telle disposition du système de mesures présenterait quelques simplifications utiles.

Malgré cela, nous allons présenter une autre méthode qui dispense de recourir aux mesures micrométriques.

14. *Deuxième méthode.* — Désignant par x, y, z les coordonnées rapportées à des axes fixes, d'un point lié aux axes mobiles et dont les coordonnées par rapport à ces axes sont x_1, y_1 et z_1; les deux systèmes ayant leur origine commune au point de suspension, on a

$$(106)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= ax_1 + by_1 + cz_1,\\ y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1,\\ z &= a''x_1 + b''y_1 + c''z_1,\end{aligned}\right.$$

équations qui font connaître les coordonnées x, y, z d'un point donné du système mobile, au moyen des valeurs connues des divers cosinus qui figurent dans leurs seconds membres.

Imaginons un style fixé sur la meule et dirigé dans le sens d'un rayon : ce style très-léger pourra, par exemple, être adapté sur l'un des cercles en fer qui maintiennent extérieurement les matériaux dont elle se compose. Concevons d'ailleurs une surface verticale, plane ou cylindrique, et disposée pour recevoir les impressions du style; puis, sur cette surface, une ligne horizontale arbitraire, à partir de laquelle se mesureront les excursions verticales du même style.

Appliquons au point extrême du style la dernière des relations précédentes; nous aurons, à cause de $c'' = 1$, et en distinguant par un trait ses coordonnées x_1, y_1, z_1 pour éviter toute confusion,

$$z = a''\overline{x}_1 + b''\overline{y}_1 + \overline{z}_1 :$$

cette relation est générale. Considérons le cas particulier de l'équilibre statique, dans lequel a'' et b'' sont nuls, et soit z_e l'ordonnée de

l'extrémité du style correspondante à cet état; nous aurons

$$z_e = \bar{z}_1:$$

or la différence $z - z_e$ est aussi celle des ordonnées des traces du style sur la surface verticale considérée, lorsque la meule est en mouvement et lorsqu'elle est dans son état d'équilibre statique. Posons donc, pour abréger,

$$\zeta = z - z_e; \tag{107}$$

nous pouvons considérer ici z et z_e comme les ordonnées du style comptées de la ligne horizontale arbitraire, dans ces deux états; attendu que leur différence ζ entrera seule dans les calculs qui suivent : nous aurons donc

$$\zeta = a''\bar{x}_1 + b''\bar{y}_1. \tag{108}$$

Dans la méthode actuelle, on pourrait se dispenser d'employer l'arbitraire λ; pour éviter de recommencer certains calculs, nous la conserverons, sauf à en disposer plus tard.

Mettons dans l'équation précédente, à la place de a'' et b'', leurs valeurs tirées de (66), en substituant dans celles-ci les valeurs (68) de x' et y'; nous aurons d'abord

$$\zeta = \frac{\xi' + x''}{\lambda}\bar{x}_1 + \frac{\eta' + y''}{\lambda}\bar{y}_1;$$

puis, au moyen des expressions (54) de x'' et y'', et posant

$$\bar{x}_1 = \bar{r}_1 \cos\varkappa_1, \quad \bar{y}_1 = \bar{r}_1 \sin\varkappa_1,$$

la valeur de ζ prendra cette forme

$$\left\{\begin{aligned} \zeta = \frac{\xi'}{\lambda}\bar{x}_1 + \frac{\eta'}{\lambda}\bar{y}_1 + \alpha_1\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos(\mu t + \nu t + \varepsilon_1 + \varkappa_1) \\ + \alpha_2\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos(\mu t - \nu t + \varepsilon_2 - \varkappa_1). \end{aligned}\right. \tag{109}$$

Les maxima et minima de ζ correspondent aux racines t de l'équation $\frac{d\zeta}{dt} = 0$: ces divers maxima et minima ont des limites que l'on obtient en égalant à ± 1 les cosinus qui figurent dans l'équation (109).

Posant à cet effet

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varkappa_1}{\pi}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\pi}:$$

on aurait les relations suivantes :

$$2\frac{t}{\pi} = \frac{h-\beta}{\mu} = \frac{k-\alpha}{\nu},$$

où h et k désignent des nombres entiers, simultanément pairs ou impairs, suivant que α_1 et α_2 sont de mêmes signes ou de signes contraires. Ces relations déterminent les valeurs de t correspondantes aux limites que nous considérons, et fournissent en même temps l'équation de condition entre les entiers h et k. Nous ne discuterons pas les conditions d'existence réelle des maxima et minima limites; cela nous entraînerait trop loin. Le lecteur jugera de la convenance qu'il peut y avoir, dans le problème actuel, de substituer, pour plus de simplicité, à la considération des maxima et minima réels, les limites de ces mêmes quantités; toutefois, il trouvera dans le numéro suivant un complément à ce qu'un tel mode de procéder semble présenter d'incorrect.

Soit σ la somme des valeurs absolues de α_1 et α_2; il est clair que les limites des maxima et minima de ζ seront égales à la somme des deux premiers termes du deuxième membre de l'expression (109), augmentée de $\pm\sigma\frac{\bar{r}_1}{\lambda}$: donc, si l'on désigne par ζ'_1 la moyenne entre ces maxima et ces minima, on aura simplement

$$\zeta'_1 = \frac{\xi'}{\lambda}\bar{x}_1 + \frac{\eta'}{\lambda}\bar{y}_1. \tag{110}$$

Actuellement changeons le style de place sur la meule, d'une quantité voisine de 90 degrés par exemple, et distinguons les résultats de la nouvelle opération par les indices 2 mis à la place de l'indice 1; nous aurons

$$\zeta'_2 = \frac{\xi'}{\lambda}\bar{x}_2 + \frac{\eta'}{\lambda}\bar{y}_2.$$

De cette équation, jointe à la précédente, on déduit

$$\frac{\xi'}{\lambda} = \frac{\bar{y}_2\zeta'_1 - \bar{y}_1\zeta'_2}{\bar{y}_2\bar{x}_1 - \bar{y}_1\bar{x}_2}, \quad \frac{\eta'}{\lambda} = \frac{\bar{x}_1\zeta'_2 - \bar{x}_2\zeta'_1}{\bar{y}_2\bar{x}_1 - \bar{y}_1\bar{x}_2}. \tag{111}$$

Le dénominateur commun de ces expressions justifie la situation relative des deux styles que nous venons de recommander.

Si l'on observe que les quantités ξ' et η' doivent être multipliées par v' dans les expressions [4], n° **12**, et que le produit $v'\xi'$, par exemple, équivaut à $\lambda v' \frac{\xi'}{\lambda}$, on voit que l'on peut faire abstraction de λ dans les applications des formules précédentes et dans la valeur de v'.

Au moyen de ces valeurs de ξ' et η', et faisant $\lambda = 1$, la solution du problème s'achèvera suivant les formules du n° **12**.

Les quantités observées étant, ici, beaucoup plus faciles à obtenir que dans la première méthode, on pourra faire abstraction des petites erreurs que l'on commettrait en essayant de placer les styles exactement dans les plans méridiens des x_1 et y_1 : si effectivement ces erreurs sont négligeables, on aura, dans ce cas, $\overline{y}_1 = 0$ et $\overline{x}_2 = 0$; ce qui réduira les valeurs (111) respectivement à

$$(112) \qquad \frac{\zeta'_1}{\overline{x}_1} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta'_2}{\overline{y}_2}.$$

En résumé, la seconde méthode consiste à fixer sur la meule un premier style dont la pointe marque des traits sur une surface verticale fixe : on note distinctement sur cette surface le trait correspondant à l'état d'équilibre statique; les ordonnées comptées de ce trait, quand la meule est en mouvement, sont désignées par ζ, leur sens positif étant la direction du zénith; on désigne par ζ'_1 l'ordonnée moyenne entre les ordonnées extrêmes, et par $\overline{x}_1$ et $\overline{y}_1$ les coordonnées de la pointe du style par rapport aux axes mobiles de x_1 et y_1. Déplaçant ensuite le style de 90 degrés environ, on effectue une opération pareille à la précédente : affectant de l'indice 2 les quantités qui se rapportent à la deuxième opération, on a, pour calculer ξ' et η', les formules (111) où l'on fait $\lambda = 1$; le reste s'achève selon les formules du n° **12**.

15. Bien que la seconde méthode satisfasse largement aux exigences de la pratique, nous en indiquerons néanmoins des perfectionnements.

En premier lieu, nous supposerons qu'à la surface verticale, destinée à recevoir les traces du style, on en adjoigne une seconde qui

soit opposée à la première, par rapport à la verticale passant par le point de suspension.

Si t est le temps du passage du style par l'un des plans, celui du passage par le plan opposé sera t augmenté de la demi-durée de la rotation de la meule, ou, en vertu de (94), $t \pm \frac{\pi}{n}$ [*]. Les fonctions trigonométriques contenues dans la formule (109) seront de la forme

$$\cos\left(\mu t \pm \nu t + \varepsilon \pm \frac{\mu \pm \nu}{n}\pi\right) :$$

et l'on a la relation

$$\frac{1}{2}\left[\cos(\mu t \pm \nu t + \varepsilon) + \cos\left(\mu t \pm \nu t + \varepsilon \pm \frac{\mu \pm \nu}{n}\pi\right)\right]$$
$$= \cos\left(\mu t \pm \nu t + \varepsilon \pm \frac{\mu \pm \nu}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\mu \pm \nu}{n}\frac{\pi}{2}.$$

Désignons par ζ'' la moyenne des valeurs de ζ fournies par deux simples passages du style sur les deux surfaces verticales opposées; on aura, suivant l'équation (109),

$$\zeta'' = \frac{\xi'}{\lambda}\bar{x}_1 + \frac{\eta'}{\lambda}\bar{y}_1 + \alpha_1\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos\left(\mu t + \nu t + \varepsilon_1 + \varkappa_1 \pm \frac{\mu + \nu}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\mu + \nu}{n}\frac{\pi}{2}$$
$$+ \alpha_2\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos\left(\mu t - \nu t + \varepsilon_2 - \varkappa_1 \pm \frac{\mu - \nu}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\mu - \nu}{n}\frac{\pi}{2}.$$

Or, $\frac{\nu}{n}$ étant une fraction peu considérable, et $\frac{\mu}{n}$ peu différent de l'unité; les cosinus de $\frac{\mu \pm \nu}{n}\frac{\pi}{2}$ seront de petites quantités : par la combinaison des deux diagrammes opposés, on réduit donc l'influence des termes périodiques.

Actuellement, ajoutons les valeurs de ζ'' fournies par plusieurs révolutions consécutives, nous aurons $\pm \frac{2\pi}{n}$, pour accroissement du temps écoulé entre ces révolutions, et

$$\pm 2\frac{\mu \pm \nu}{n}\pi,$$

pour celui des angles compris sous les signes trigonométriques.

[*] Le signe + répond au cas de n positif et le signe — au cas de n négatif.

La formule de sommation des cosinus ou sinus est, en désignant par N′ le nombre des termes,

$$\sum_{i=0}^{i=\mathrm{N}'-1} \frac{\cos}{\sin}(p+i\alpha) = \frac{\cos}{\sin}\left(p+\frac{\mathrm{N}'-1}{2}\alpha\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\mathrm{N}'\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}:$$

nous devons faire, dans cette formule,

$$\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\frac{\mu\pm\nu}{n}\pi.$$

En l'appliquant ici, nous trouvons

$$\sum_{i=0}^{i=\mathrm{N}'-1}\cos\left(\mu t\pm\nu t+\varepsilon\pm\varkappa_1\pm\frac{\mu\pm\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\left[\mu t_0\pm\nu t_0+\varepsilon\pm\varkappa_1\pm(2\mathrm{N}'-1)\frac{\mu\pm\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right]\frac{\sin\frac{\mathrm{N}'(\mu\pm\nu)}{n}\pi}{\sin\frac{\mu\pm\nu}{n}\pi}:$$

La moyenne des valeurs de ζ'' est donc

$$(113)\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{N}'}\sum\zeta'' &= \frac{\xi'}{\lambda}\bar{x}_1+\frac{\eta'}{\lambda}\bar{y}_1\\ &+\frac{\alpha_1}{2\mathrm{N}'}\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos\left[\mu t_0+\nu t_0+\varepsilon_1+\varkappa_1\pm(2\mathrm{N}'-1)\frac{\mu+\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right]\frac{\sin\mathrm{N}'\frac{\mu+\nu}{n}\pi}{\sin\frac{\mu+\nu}{n}\frac{\pi}{2}}\\ &+\frac{\alpha_2}{2\mathrm{N}'}\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos\left[\mu t_0-\nu t_0+\varepsilon_2-\varkappa_1\pm(2\mathrm{N}'-1)\frac{\mu-\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right]\frac{\sin\mathrm{N}'\frac{\mu-\nu}{n}\pi}{\sin\frac{\mu-\nu}{n}\frac{\pi}{2}}\end{aligned}\right.$$ [*].

Le dénominateur $\sin\frac{\mu\pm\nu}{n}\frac{\pi}{2}$ diffère peu de l'unité; tandis que les facteurs $\sin\mathrm{N}'\frac{\mu\pm\nu}{n}\pi$ diffèrent peu de $\sin\mathrm{N}'\pi$ ou zéro : les termes en α_1 et α_2 sont déjà par cela seul très-faibles; mais ils sont encore consi-

[*] Le double signe qui précède l'unité dans cette formule, est relatif au signe de n : le signe + convient au cas de n positif et le signe — au cas où n est négatif.

dérablement affaiblis par le diviseur $2N'$. Donc, en prenant pour valeur de la fonction ζ'_1 (110) la moyenne des valeurs de ζ'' correspondante à un certain nombre de tours, tel que 15 ou 20, on ne commettra aucune erreur sensible.

On aura sans doute quelque peine à distinguer les traits du diagramme dans le voisinage des maxima et minima : pour appliquer la formule (113), il faudrait recueillir des traits fournis par le style, sur un disque tournant avec lenteur; en faisant tourner ce disque pendant que la meule est en équilibre statique, le style y tracerait une circonférence, et les excès des rayons vecteurs des traits obtenus pendant le mouvement de la meule, sur le rayon dudit cercle, pris avec le signe convenable, serviraient à former les quantités ζ''.

Enfin, nous devons faire remarquer que le frottement ayant été négligé dans nos formules, les amplitudes ou intervalles compris entre les maxima et minima varieront nécessairement : pour que les positions moyennes en soient le moins possible affectées, il conviendra de répéter les expériences et de prendre des moyennes entre les résultats obtenus.

Lorsqu'on se bornera, comme il a été dit n° **14**, à prendre la position moyenne entre les maxima et minima, on éliminera l'effet du frottement, en combinant un minimum, par exemple, avec la moyenne des deux maxima précédent et suivant, ou inversement. Cela ne devra pas présenter de difficulté, puisque les amplitudes, étant réduites par le frottement, deux maxima ou minima consécutifs, ne répondront pas aux mêmes ordonnées [*].

16. *Solution du problème* par le procédé dit *de fausse position.* — Au lieu d'appliquer le procédé des fausses positions dans toute sa

---

[*] Le frottement réduit l'amplitude des mouvements verticaux du style, de telle sorte que les ordonnées maxima sont diminuées et les ordonnées minima augmentées. Supposons que l'on connaisse l'ordonnée maximum réduite par le frottement, dans le cas où, malgré l'impossibilité qu'il en soit ainsi, elle serait contemporaine de l'ordonnée minimum; la moyenne de ces deux ordonnées serait affranchie de l'effet du frottement; or, c'est précisément ce à quoi l'on parvient en prenant pour ordonnée maximum la moyenne des deux maxima qui précèdent et suivent le minimum considéré.

généralité, nous en simplifierons l'emploi en ne considérant qu'une seule variable. Rappelons qu'il convient d'établir les masses réglantes dans deux plans méridiens rectangulaires et orientés autant que possible à 45 degrés par rapport à l'axe transversal de l'anille : en admettant, chose facile à réaliser, que les pointes des styles soient dans ces mêmes plans, on voit, par les valeurs (111) de $\frac{\xi'}{\lambda}$ et $\frac{\eta'}{\lambda}$, que ces quantités sont respectivement des fonctions de ζ'_1 et ζ'_2; d'ailleurs les expressions (104) et (105), en y faisant y_1 et x_2 nuls, montrent que ξ' et η' sont respectivement des fonctions de δz_1 et δz_2, ou simplement de z_1 et z_2; on a donc

$$\zeta'_1 = f_1(z_1), \quad \zeta'_2 = f_2(z_2),$$

les lettres f_1 et f_2 étant les caractéristiques de fonctions.

Du reste si, en réalité, les valeurs de y_1, $\overline{y}_1$, x_2, $\overline{x}_2$ ne sont pas exactement nulles, mais seulement très-petites, il n'en résultera que des erreurs du deuxième ordre et par conséquent négligeables. Ainsi, dans ces conditions d'orientation rectangulaire des centres de gravité des masses réglantes, les effets des deux masses sont indépendants.

Considérant la première des fonctions précédentes, on a

$$\delta\zeta'_1 = \frac{d\zeta_1}{dz_1}\delta z_1 :$$

or, une valeur suffisamment exacte du coefficient différentiel s'obtiendra par la simple comparaison de deux valeurs $\Delta\zeta'_1$ et Δz_1 des variations correspondantes de ζ'_1 et z_1 : il s'ensuit

$$\delta\zeta'_1 = \frac{\Delta\zeta'_1}{\Delta z_1}\delta z_1.$$

Maintenant, remarquons que la condition à remplir est que la valeur corrigée de ζ'_1 soit nulle; car, si elle est nulle et s'il en est de même de ζ'_2, les milieux des oscillations répondront à l'horizontalité de la face inférieure de la meule; on a donc l'équation de condition

$$\zeta'_1 + \delta\zeta'_1 = 0,$$

ou

$$\zeta'_1 + \frac{\Delta\zeta'_1}{\Delta z_1}\delta z_1 = 0$$

On en déduit la valeur suivante de δz_1, à laquelle nous joignons celle de δz_2, qu'on obtiendrait de la même manière :

$$(114) \qquad \delta z_1 = -\frac{\Delta z_1}{\Delta \zeta'_1}\zeta'_1, \quad \delta z_2 = -\frac{\Delta z_2}{\Delta \zeta'_2}\zeta'_2.$$

Telles sont les corrections à appliquer aux valeurs expérimentées de z_1 et z_2.

En appliquant les formules (114), il ne sera pas nécessaire de chercher à mesurer les coordonnées z_1 et z_2 : comme ces formules ne contiennent que leurs variations, l'origine de ces coordonnées pourra être prise arbitrairement. Quant aux positions à donner aux masses réglantes, dans les deux opérations à faire sur chacune d'elles, on pourra s'en tenir aux positions limites de ces masses; les coefficients de ζ'_1 et ζ'_2 seront alors déterminés le plus exactement possible. Dans le cas où, les masses réglantes étant égales, les rayons aboutissant aux extrémités des deux styles seront égaux, et où il en sera de même pour les centres de gravité des masses réglantes; on aura une vérification de l'exactitude des résultats, si l'on trouve $\frac{\Delta z_1}{\Delta \zeta'_1} = \frac{\Delta z_2}{\Delta \zeta'_2}$: cela résulte de la valeur de v. Si ces facteurs ne présentent qu'une différence imputable aux erreurs des observations, on en pourra prendre la moyenne dans le calcul de δz_1 et δz_2 (on suppose, bien entendu, que les valeurs de n dans ces observations seront peu différentes ou très-grandes).

Il est évident que les opérations relatives aux deux masses réglantes pourront être effectuées simultanément; mais, alors, il faudra que les deux styles soient établis à des niveaux assez différents pour que les traces de l'un ne se confondent pas avec celles de l'autre.

Terminons par une dernière remarque : on emploie dans la pratique, pour former les masses réglantes, un ensemble de disques de bois et un disque de métal, tandis que notre théorie s'applique à un disque unique dont le centre de gravité a pour ordonnée z_1 ou z_2; il faudrait donc considérer le déplacement du centre de gravité d'un ensemble de disques dont la masse totale reste invariable; ce qui semble exiger de nouveaux calculs. Mais il n'en est pas ainsi, attendu que la valeur de z_1 ou de z_2 est en réalité une fonction de l'ordonnée du centre de gravité du disque de métal; il en est de même des quan-

tités ζ'_1 et ζ_2. Donc il suffit d'appliquer au déplacement des seuls disques de métal, ce qui a été établi pour le centre de gravité de l'ensemble des disques, sous la seule condition de ne pas faire varier cet ensemble de masses.

Beaucoup d'ingénieurs préféreront sans doute opérer ainsi, que recourir à l'emploi des formules que nous avons exposées dans les numéros précédents, bien que le travail d'expérimentation en soit doublé.

Un procédé aussi pratique est tout à fait dans les habitudes des ingénieurs : il se distingue toutefois de ceux qui ont été recommandés jusqu'ici, en ce qu'il précise le genre et le mode d'observations et que, l'expérimentation ne portant que sur une variable à la fois et non sur quatre, cesse dès lors d'être un tâtonnement proprement dit.

Le même procédé s'appliquerait également à la première méthode.

17. *De l'emploi de quatre masses réglantes.* — Nous avons rappelé, au commencement de ce Mémoire, l'habitude des constructeurs qui adaptent quatre masses réglantes sur les meules horizontales; nous avons également montré que deux de ces masses suffisent, et que, quand elles sont situées dans deux plans méridiens rectangulaires, leur position peut être déterminée séparément. On a prévu, n° **12**, le cas où les déplacements nécessaires de ces masses excéderaient les limites de l'espace disponible, et l'on a vu qu'il conviendrait alors de leur substituer des masses plus considérables. Nous voulons montrer ici comment on peut remplacer l'accroissement des masses par celui de leur nombre, en le portant par exemple de deux à quatre.

Supposons, pour plus de simplicité, que les centres de gravité des quatre masses soient contenus dans deux plans méridiens rectangulaires, de manière à pouvoir déterminer séparément les positions des deux masses contenues dans un même plan méridien : soient m_1 et m_3 ces deux masses, et affectons respectivement des indices 1 et 3 leurs coordonnées. Prenant pour plan des $x_1 z_1$ le plan méridien qui les contient, les termes de la somme G (2) qui leur correspondent seront

$$m_1 x_1 z_1 + m_3 x_3 z_3;$$

cette même somme ne contiendra pas de termes relatifs aux deux

autres masses m_2 et m_4, parce que, leurs centres de gravité étant dans le plan des $y_1 z_1$, les abscisses x_2 et x_4 seront nulles. En conséquence, la deuxième équation de condition (102) deviendra

$$G + m_1 x_1 \delta z_1 + m_3 x_3 \delta z_2 = 0.$$

On pourra satisfaire à cette condition de bien des manières : voici celle qui nous paraît la plus simple et de nature à exiger les moindres valeurs de m_1 et m_3. Au lieu de laisser indépendantes les variations δz_1 et δz_3, nous établirons entre elles la relation arbitraire

$$\delta z_3 = -i \delta z_1, \tag{115}$$

où l'on fait

$$i = -\frac{m_1 x_1}{m_3 x_3}. \tag{116}$$

Nous pouvons supposer m_3 peu différent de m_1, et pareillement x_3 à peu près égal à $-x_1$, en sorte que i diffère peu de l'unité. Quoi qu'il en soit, l'équation de condition deviendra

$$G + 2 m_1 x_1 \delta z_1 = 0.$$

On pourra ainsi satisfaire à cette équation au moyen d'un déplacement δz_1 moitié moindre que si l'on ne faisait usage que de la seule masse m_1.

Il va sans dire que, les déplacements exprimés dans le numéro précédent par la lettre Δ étant soumis à la relation (115) en ce qui concerne m_3, tout ce qui a été exposé dans ce numéro, pour un système de deux masses réglantes, s'appliquera au cas des quatre masses que nous considérons. Les positions limites à donner aux masses m_1 et m_3, dans les deux expériences, seront telles que l'une réponde au maximum et l'autre au minimum de leurs ordonnées respectives.

Nous laissons aux constructeurs le soin de juger s'il convient mieux, à d'autres égards, d'employer quatre masses plutôt que deux ayant même épaisseur et des sections horizontales doubles. Dans le premier cas, ils n'auront pas à se préoccuper de leur influence particulière sur

l'équilibre statique. En réduisant à deux le nombre de ces masses, ils doivent combiner les épaisseurs des disques de bois et de métal dont elles se composent, de manière que leur poids soit à peu près égal à celui de la matière enlevée à la meule pour faire place à ces masses : en employant par exemple des disques en fonte de fer, ils devraient donner à ces disques à peu près le tiers de l'épaisseur totale des disques réunis (fonte et bois).

P. S. Je dois réparer une omission concernant la forme donnée aux termes fournis par les masses réglantes dans les expressions de F et G, page 354.

Ces termes ont été calculés en supposant les masses concentrées en leurs centres de gravité : l'erreur qui en résulte apparaît comme tout à fait négligeable; mais il est facile de montrer qu'elle est absolument nulle. En effet, considérons par exemple le terme $m_1 x_1 z_1$: ce terme devrait être remplacé par $\Sigma m(x_1 + \delta x)(z_1 + \delta z)$; m désignant l'une des masses élémentaires dont m_1 se compose et $x_1 + \delta x$, $z_1 + \delta z$ ses coordonnées. Cette somme Σ étant développée, à cause de $m_1 = \Sigma m$, devient

$$m_1 x_1 z_1 + x_1 \Sigma m \delta z + z_1 \Sigma m \delta x + \Sigma m \delta x \delta z.$$

Or, $\Sigma m \delta x$ et $\Sigma m \delta z$ sont nuls, attendu que les δx et δz sont comptés d'axes passant par le centre de gravité de m_1; d'un autre côté, si le dernier terme $\Sigma m \delta x \delta z$ n'est pas absolument nul, il est constant, puisque le déplacement des masses n'est supposé avoir lieu que parallèlement à l'axe des z_1. Dès lors ce terme peut être considéré comme compris dans la constante G_0. Les expressions F et G sont donc exemptes de toute erreur provenant de la concentration des masses réglantes en leurs centres de gravité.

TABLES DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES QUINZE PREMIERS VOLUMES

(DEUXIÈME SÉRIE),

SUIVIES

D'UNE TABLE GÉNÉRALE PAR NOMS D'AUTEUR.

ANNÉES 1856, 1857, 1858, 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, 1864, 1865, 1866, 1867, 1868, 1869 ET 1870.

TOME Ier. (ANNÉE 1856.)

TOME II. (Année 1857.)

TOME III. (Année 1858.)

TOME IV. (Année 1859.)

TOME V. (ANNÉE 1860.)

TOME VI. (Année 1861.)

TOME VII. (ANNÉE 1862.)

TOME VIII. (Année 1863.)

TOME IX. (Année **1864**.)

TOME X. (Année 1865.)

TOME XI. (Année 1866.)

TOME XII. (Année 1867.)

TOME XIII. (Année 1868.)

TOME XIV. (Année 1869.)

TOME XV. (Année 1870.)

TABLE DES MATIÈRES

PAR

NOMS D'AUTEUR.

B

C

D

G

H

J

K

L

M

N

O

P

R

S

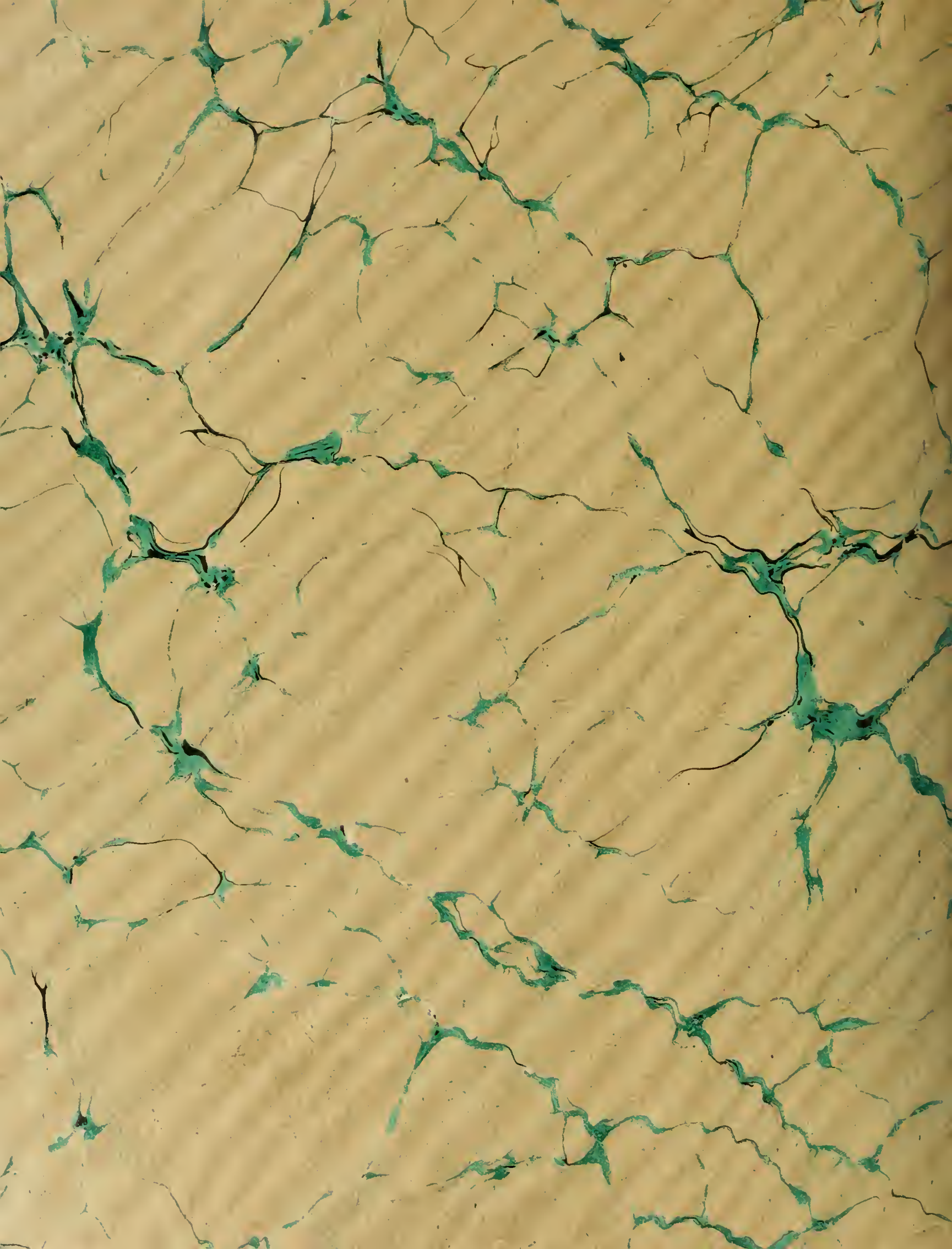
T

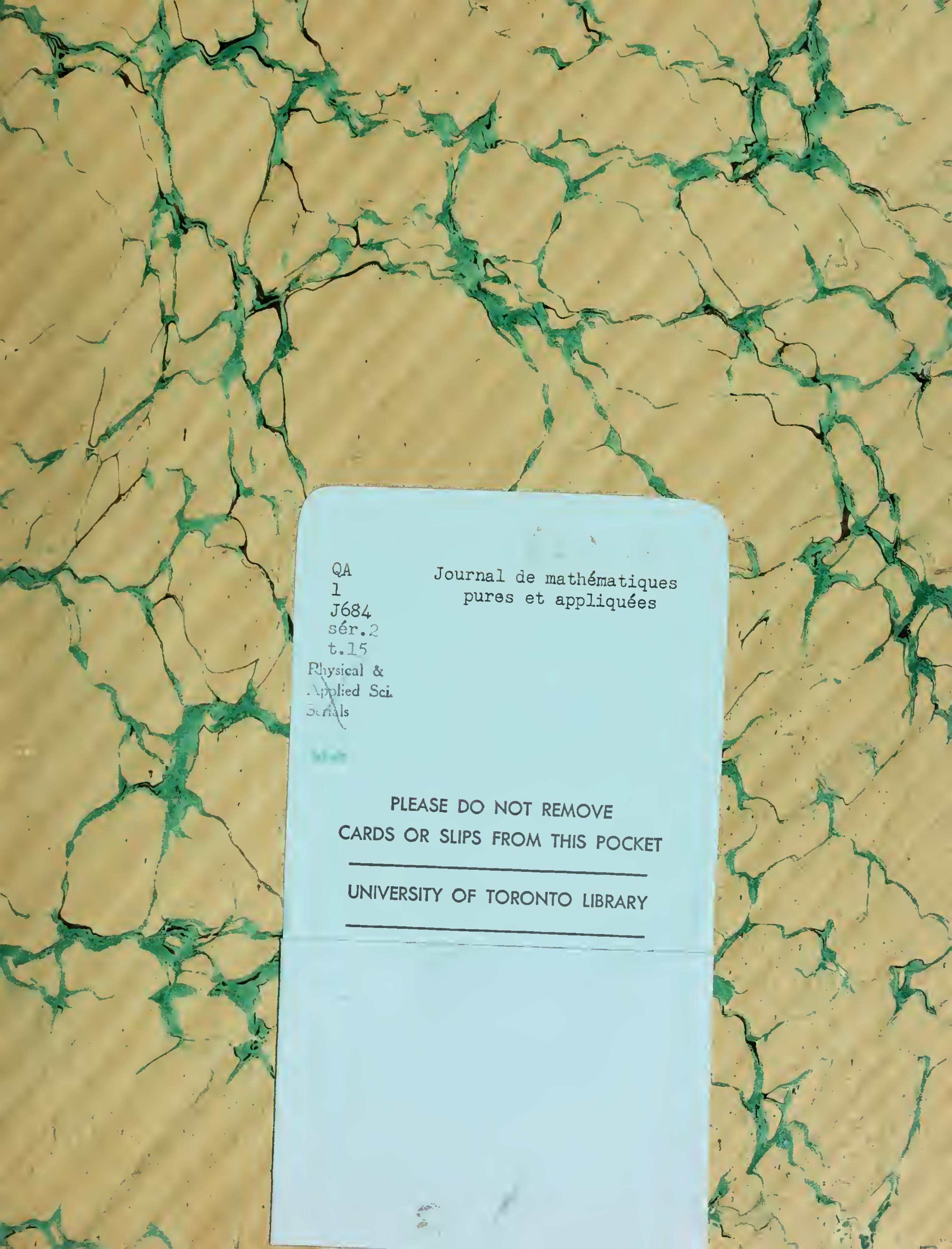
V

W

FIN DU TOME QUINZIÈME (2e SÉRIE).

50





QA
1
J684
sér.2
t.15
Physical &
Applied Sci.
Serials
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

